TP - Variations de fonctions

1 Plan général d'étude d'une fonction

Méthode d'étude d'une fonction f définie sur $\mathscr{D}_f$.

1) On calcule f' là où f est dérivable.
Pour cela, on utilise les règles de dérivation.

2) On détermine le signe de f'.

3) On détermine les variations de f grâce au résultat suivant :

> Soit f une fonction définie et dérivable sur un <u>intervalle</u> I.
>
> (i) **Pour déterminer les variations de f :**
> Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
>
> (ii) **Pour montrer que f est strictement (dé)croissante :**
> Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) <u>sauf éventuellement en un nombre fini de points</u> alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
>
> (iii) **Pour montrer que f est constante :**
> Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I et la valeur de la constante est $f(x_0)$ pour x_0 quelconque dans I.

5) On étudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
On en déduit les asymptotes horizontales et verticales à $\mathscr{C}_f$.

6) Détermination des tangentes de f en certains points (qui sont en général précisés).

On rappelle le résultat suivant :

> Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. La tangente (T_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation :
>
> $$(T_a): \quad y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

7) Pour tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$, on place dans un repère :

- quelques points remarquables (ceux dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$)
- droites particulières (tangentes, asymptotes) à $\mathscr{C}_f$
- on peut placer des points supplémentaires.

On trace alors $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1.1 Déterminer la dérivée d'une fonction

Exercice n°1 Calculer la dérivée d'une fonction

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (<u>on ne s'occupera pas de l'existence de cette dérivée</u>).

1. $f : x \mapsto x + e^x$
2. $f : x \mapsto \ln(x) - 1$
3. $f : x \mapsto \sqrt{x} + 2x$
4. $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+2x+3}$
7. $f : x \mapsto x^2 e^x$
8. $f : x \mapsto x\ln(x) - x$
9. $f : x \mapsto (2x+3)^2$
10. $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$
11. $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x+2}$
12. $f : x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2}$
13. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2+5}}$

Corrections :

1. $f' : x \mapsto 1 + e^x$
2. $f' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
3. $f' : x \mapsto \dfrac{4\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$
4. $f' : x \mapsto 6x(x-1)$
5. $f' : x \mapsto \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$
6. $f' : x \mapsto \dfrac{-x^2+2x+5}{(x^2+2x+3)^2}$
7. $f' : x \mapsto x(x+2)e^x$
8. $f' : x \mapsto \ln(x)$
9. $f' : x \mapsto 4(2x+3)$
10. $f' : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$
11. $f' : x \mapsto \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$
12. $f' : x \mapsto \dfrac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $f' : x \mapsto \dfrac{5-x^2}{2(x^2+5)\sqrt{x(x^2+5)}}$

1.2 Variations

Exercice n°2 Déterminer les variations d'une fonction

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition
(<u>on admettra que ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition</u>)

1. $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$
3. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$
4. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$
5. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$
6. $f : x \mapsto \ln(1+e^{-x})$ définie sur $\mathbb{R}$
7. $f : x \mapsto \ln\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $]1, +\infty[$
8. $f : x \mapsto e^{\frac{1}{\ln(x)}}$ définie sur $]0, +\infty[- \{1\}$