# TP - Variations de fonctions

## 1 Plan général d'étude d'une fonction

Méthode d'étude d'une fonction $f$ (dérivable) :

**1)** Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de $f$ si celui-ci n'est pas donné.
*En général $\mathscr{D}_f$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles.*

**2)** On calcule $f'$ là où $f$ est dérivable.
*Pour cela, on utilise les règles de dérivation.*

**3)** On étudie le signe de $f'$.
*Pour cela, on résout l'inéquation $f'(x) \geq 0$.*

**4)** On déterminer les variations de $f$ grâce au résultat suivant :

> Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un <u>intervalle</u> $I$.
>
> (i) **Pour déterminer les variations de $f$ :**
> Si, pour tout $x \in I,\ f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) alors $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$.
>
> (ii) **Pour montrer que $f$ est strictement (dé)croissante :**
> Si, pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) <u>sauf éventuellement en un nombre fini de points</u> alors $f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $I$.
>
> (iii) **Pour montrer que $f$ est constante :**
> Si, pour tout $x \in I,\ f'(x) = 0$ alors $f$ est constante sur $I$ et la valeur de la constante est $f(x_0)$ pour $x_0$ quelconque dans $I$.

**5)** On étudie les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
*On en déduit les asymptotes horizontales et verticales à $\mathscr{C}_f$.*

**6)** Détermination des tangentes de $f$ en certains points (qui sont en général précisés).

On rappelle le résultat suivant :

> Soit $f$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. La tangente $(T_a)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ admet pour équation :
> $$(T_a) : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

**7)** Dans un repère, pour tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$, on place :

- quelques points remarquables (ceux dont l'abscisse $x$ vérifie $f'(x) = 0$)
- droites particulières (tangentes, asymptotes) à $\mathscr{C}_f$
- on peut placer des points supplémentaires.

On trace alors $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$.

## 1.1 Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

Lors de l'étude d'une fonction $f$, il y a deux cas possibles

- Soit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de $f$ est donné.
  On trouvera alors écrit :
  - On considère la fonction $f$ définie sur $I$ par : $\forall x \in I,\ f(x) = \ldots\ldots$ (expression de $f$)
  - On considère la fonction $\begin{array}{rccc} f: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

  L'ensemble de définition est alors $\mathscr{D}_f = I$.
- Soit seule l'expression $f(x)$ de $f$ est donnée.
  Dans ce cas, on cherche l'ensemble de tous les nombres réels $x$ tels que $f(x)$ est définie (i.e. a un sens).

**Les trois cas problématiques pour qu'une fonction $f$ soit définie (resp. continue) sur $I$ sont les suivants :**

Soient $g$ et $h$ deux fonctions deux fonctions définies sur $I$.

(i) Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, $f$ est définie en tout point $x \in I$ tel que $h(x) \neq 0$.

(ii) Si $f(x) = \sqrt{g(x)}$, $f$ est définie en tout point $x \in I$ tel que $g(x) \geq 0$.

(iii) Si $f(x) = \ln(g(x))$, $f$ est définie en tout point $x \in I$ tel que $g(x) > 0$.

**Exercice n°1 Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction**

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^{21} + x - 9$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-3}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2-4}$
4. $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$
5. $f : x \mapsto \ln(x^2 - x + 2)$
6. $f : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$
7. $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$
8. $f : x \mapsto \dfrac{e^{3x} - 2}{e^{\frac{x}{2}} - 4}$
9. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{2 - x^2}$
10. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

## 1.2 Déterminer la dérivée d'une fonction

**Exercice n°2 Calculer la dérivée d'une fonction**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on ne s'occupera pas de l'existence de cette dérivée).

1. $f : x \mapsto x + e^x$
2. $f : x \mapsto \ln(x) - 1$
3. $f : x \mapsto \sqrt{x} + 2x$
4. $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+2x+3}$
7. $f : x \mapsto x^2 e^x$
8. $f : x \mapsto x\ln(x) - x$
9. $f : x \mapsto (2x+3)^2$
10. $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$
11. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$
12. $f : x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2}$
13. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2+5}}$

## 1.3 Variations

**Exercice n°3 Déterminer les variations d'une fonction**

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition
(on admettra que ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition)

1. $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$
2. $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$
5. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$
6. $f : x \mapsto \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$
7. $f : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$

## 2 Etablir une inégalité par étude des variations

**Exercice n°4 Déterminer les variations d'une fonction pour établir une inégalité**

1. Montrer que : $\forall x \in [1;+\infty[, \quad x^3 \geq x^2 - x + 1$
2. Montrer que : $\forall x \in [0;1], \quad 0 \leq x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$
3. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) \leq x$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$
4. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 1 \leq e^x$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^x$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \leq e^x$
   (d) Généraliser.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$
6. Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Montrer que : $\forall x > 0, \quad \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.