# TP - Logique

## 1 Assertion et quantification

**Définition :** Une **assertion** est une affirmation qui peut prendre deux valeurs de vérité : vrai ou faux.

- **Principe du tiers exclus :** Il n'y a pas de troisième valeur de vérité.
- **Principe de non-contradiction :** Une assertion ne peut être vraie et fausse en même temps.

**Exemples :**

- $P$ : "Paris est la capitale de la France"est une assertion vraie.
- $Q$ : "1>2"est une assertion fausse.

**Opérations booléennes :** Soient $P$ et $Q$ deux assertions.

- **et :** L'assertion "$P$ et $Q$"est vraie lorsque $P$ et $Q$ sont vraies en même temps.
- **ou :** L'assertion "$P$ ou $Q$"est vraie lorsqu'au moins une des deux assertions $P$, $Q$ est vraie.
- **non :** L'assertion "non($P$)"est vraie lorsque $P$ est fausse et fausse lorsque $P$ est vraie.
  On l'appelle la négation de $P$.

**Exemples :**

- "$3 > 2$ et $-1 \geq 0$" est fausse car "$-1 \geq 0$" est fausse.
- "$3 > 2$ et $-1 < 0$" est vraie car "$3 > 2$"et "$-1 \geq 0$" sont vraies.
- "$3 > 2$ ou $-1 \geq 0$" est vraie car "$3 > 2$" est vraie.
- "$3 > 2$ ou $-1 < 0$" est vraie car "$3 > 2$"et "$-1 \geq 0$" sont vraies (une seule aurait suffit).
- "$3 \leq 2$ ou $-1 \geq 0$" est fausse car "$3 \leq 2$"et "$-1 \geq 0$" sont fausses simultanément.
- non("Il pleut") est "Il ne pleut pas".
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. non($a < b$) est $a \geq b$

**Exercice n°1**

Soient $P$ la propriété "$x^2 > 1$" et $Q$ la propriété "$x < 0$".

1. Que pensez-vous de la propriété "$P$ et $Q$" quand $x = -5$ ? $x = \sqrt{3}$ ? $x = -0,8$ ? $x = \dfrac{5}{6}$ ?
2. Mêmes questions pour la propriété "$P$ ou $Q$".
3. Mêmes questions pour la propriété "non($P$)".

**Exercice n°2 La nécessité de quantifier**

Que pensez-vous des relations suivantes ? Sont-elles vraies ? fausses ?

- $2(x + 2) = 2x + 4$
- $2(x + 2) = x + 4$

**Les quantificateurs :**

- Le symbole $\forall$ se traduit par :
- La symbole $\exists$ se traduit par :
- La symbole $\exists!$ se traduit par :

**Exercice n°3 Connaître et manipuler des quantificateurs**

Que pensez-vous des assertions suivantes ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x^2 = 1$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ 3x^2 = 1$
3. $\exists! x \in \mathbb{R},\ 3x^2 = 1$
4. $\exists! x \in \mathbb{R}_+,\ 3x^2 = 1$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x+2} = e^x e^2$

**Exercice n°4 Connaître et manipuler des quantificateurs**

1. Soit $V$ l'ensemble des vaccins. Soit $M$ l'ensemble des maladies.
   Si $(v, m) \in V \times M$, on notera $v \hookrightarrow m$ la proposition : "$v$ agit sur $m$".
   Traduire en français les énoncés suivants, et débattre leur pertinence :
   a) $\exists v \in V, \forall m \in M, v \hookrightarrow m$ b) $\forall m \in M, \exists v \in V, v \hookrightarrow m$ c) $\forall v \in V, \exists m \in M, v \hookrightarrow m$
2. Que pensez-vous des valeurs de vérités des deux assertions suivantes ?

   a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 12$ a) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 12$

   Qu'en déduisez-vous ?

**Exercice n°5 Traduire en termes mathématiques une phrase en français à l'aide des quantificateurs**

Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes :

1. Tous les réels ont un carré positif.
2. L'équation $\frac{1}{x} = x$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}^\star$.
3. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.
4. L'équation $x^3 + x + 1 = 0$ a exactement une solution réelle.

**Exercice n°6 Déterminer la négation d'une proposition (c'est-à-dire le complémentaire de l'événement)**

Donner la négation des propositions suivantes :

a) Mon parapluie est blanc. b) Je possède au moins un parapluie. c) Je possède au plus un parapluie.
d) Je n'ai ni parapluie, ni capuche. e) J'ai un parapluie et une capuche. f) Toutes les boulangeries fabriquent du pain.
g) Il existe (au moins) un lac salé. h) $\exists x \in \mathbb{R},\, x^2 + x + 1 = 0$. i) $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\, x + \frac{1}{x} \geq 3$.

**Bilan sur les négations d'assertions :**

- non($P$ et $Q$) s'écrit
- non($P$ ou $Q$) s'écrit
- non($\forall x \in E,\, P(x)$) s'écrit
- non($\exists x \in E,\, P(x)$) s'écrit

## 2 Implication et équivalence

**Implication :**

L'énoncé "$P \Rightarrow Q$"qui se lit "$P$ implique $Q$", signifie que **SI** $P$ est vraie, **ALORS** $Q$ l'est.

**Exemples :**

- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'implication $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ est vraie.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'implication $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$ est fausse.
- L'implication "J'habite à Gap $\Rightarrow$ J'habite en France"est vraie.

**Vocabulaire :**

Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que :

- $P$ est une condition suffisante à $Q$ (il suffit d'avoir $P$ pour avoir $Q$)
- $Q$ est une condition nécessaire à $P$ ($P$ ne peut être vraie sans que $Q$ le soit, $Q$ est nécessaire à $P$)

**Exercice n°7 Reformulations d'une implication**

On sait que tout entier naturel multiple de 6 est aussi un multiple de 3.

Ecrire l'affirmation précédente en suivant chacune des structures de phrase suivantes :

1. Si ... alors ...
2. ... implique ...
3. ... est une condition suffisante pour ...
4. ... est une condition nécessaire pour ...
5. ... $\Rightarrow$ ...

**Exercice n°8 La nécessité de quantifier, encore !**

Que pensez-vous de l'implication suivante ? Est-elle vraie ? fausse ?

- $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

**Réciproque d'une implication :**

$Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication **Réciproque de** $P \Rightarrow Q$

**Exercice n°9 Implication réciproque**

Ecrire une implication vraie dont l'implication réciproque est fausse.

**Equivalence :**

Lorsque $P \Rightarrow Q$ et sa réciproque $Q \Rightarrow P$ sont vraies, on dit que $P$ et $Q$ sont **équivalentes**.

- On note alors $P \iff Q$
- ce qui se lit $P$ équivaut à $Q$, ou $\boxed{P \text{ est vraie si et seulement si } Q \text{ est vraie}}$
- $P$ est une condition nécessaire et suffisante à $Q$
- $Q$ est une condition nécessaire et suffisante à $P$

**Deux propositions $P$ et $Q$ sont équivalentes lorsqu'elles ont la même valeur de vérité**
**(vraies en même temps, fausses en même temps)**

**Exercice n°10**

Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

Lorsqu'il n'y a pas équivalence, donner un contre exemple.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\forall n \in \mathbb{R}$ | $n \geq 0$ | | $n \in \mathbb{N}$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}$ | $x^2 = 1$ | | $x = 1$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}$ | $x^2 > 1$ | | $x > 1$ |
| $\forall a, b \in \mathbb{R}$ | $a > 0$ et $b > 0$ | | $ab > 0$ |
| $\forall a, b \in \mathbb{R}$ | $a > 0$ et $b > 0$ | | $a + b > 0$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}$ | $x \geq 0$ et $x^2 = 1$ | | $x = 1$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}$ | $(x-3)(2x+1) = 0$ | | $x = 3$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}$ | $x \geq 3$ | | $x \geq 5$ |
| $\forall x \in \mathbb{N}$ | $x > 3$ | | $x \geq 4$ |
| $\forall x \in \mathbb{Z}$ | $x \in [0; 2]$ | | $-1 < x < 3$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}$ | $x^2 \in [0; 9]$ | | $0 \leq x \leq 3$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}$ | $2x^2 + x = 0$ | | $x = -\frac{1}{2}$ |
| $\forall a, b \in \mathbb{R}$ | $a^2 = b^2$ | | $a = b$ |
| | | | |
| $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}_+$ | $a = \sqrt{b}$ | | $a^2 = b$ |
| | | | |
| $\forall a, b \in \mathbb{R}$ | $a^2 \leq b^2$ | | $a \leq b$ |
| | | | |

**Exercice n°11 Résolution par équivalences d'(in)équations avec $\sqrt{\ }$**

1. *Premier exemple sans soucis :* Résoudre par équivalence dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-1} = 5$.
2. On considère l'équation $\sqrt{3x^2 - 1} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Critiquer et corriger la résolution suivante :

   $\sqrt{3x^2 - 1} = x \iff 3x^2 - 1 = x^2 \iff 2x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Solutions : $\mathscr{S} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.
3. *Second exemple :* Résoudre par équivalence dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x+6} = x$.
4. *Troisième exemple :* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E)$ : $\quad x = \sqrt{2 - x^2}$
5. *Une inéquation :* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I)$ : $\quad x \leq \sqrt{2 - x^2}$.

**Exercice n°12 Résolution par analyse-synthèse d'équations avec $\sqrt{\ }$**

Résoudre par analyse-synthèse les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

1. *Cours :* $\sqrt{x+8} = x + 2$.
2. $\sqrt{x+6} = x$, puis $x + 1 = \sqrt{5 - x^2}$.
3. $x = \sqrt{1-x}$. Critiquer la méthode.

**Contraposée d'une implication :**

non$(Q) \Rightarrow$ non$(P)$ est appelée l'implication **Contraposée de** $P \Rightarrow Q$

**Exercice n°13 Implication contraposée**

Ecrire la contraposée des implications suivantes :

- "Si il pleut, je prends mon parapluie"
- Soient $A, B, C$ trois points du plan. "Si $ABC$ est un triangle rectangle en $B$ alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$"
- Soit $n \in \mathbb{N}$. "$n^2$ pair $\Rightarrow$ $n$ pair"