Déterminer une primitive

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que la fonction F définie sur I est une primitive de f sur I lorsque :

- F est dérivable sur I
- $F' = f$

Remarque : Si f possède une primitive F sur I, celle-ci n'est pas unique.
En effet, $x \mapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est également une primitive de f sur I.

Exercice n°0 Rappels sur les manipulations de puissances

1. Soit $x > 0$. Ecrire chacune des expressions suivantes sous la forme x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x} \qquad \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x^2} \qquad x\sqrt{x} \qquad \frac{1}{x\sqrt{x}} \qquad x\frac{1}{x^a} \qquad \frac{\sqrt{x}}{x^a}$$

2. Soit $x > 0$. Ecrire chacune des expressions suivantes uniquement à l'aide de x^n où $n \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{x}$:

$$x^{3/2} \qquad x^{-1/2} \qquad x^{5/2} \qquad \frac{x^{1/2}}{x^{-1}x^2}$$

Primitive sans $\ln$ et $\exp$

Exercice n°1 Utiliser le tableau des primitives usuelles

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

$$f_1(x) = 2x + 1 \quad I = \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \frac{-4}{3x^5} \quad I = \mathbb{R}_+^\star, \qquad f_3(x) = x + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad I = \mathbb{R}_+^\star$$

Exercice n°2 Déterminer une primitive de $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$f_1(x) = 3(3x+1)^4 \qquad f_3(x) = (2x+7)^6 \qquad f_5(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$$

Exercice n°3 Déterminer une primitive de $u'u^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Vous commencerez par vous ramener à une expression du type $u'u^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \frac{4}{(1+4x)^2} \qquad f_7(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad f_5(x) = \frac{-1}{(2-x)\sqrt{2-x}}$$

Exercice n°4 Primitive d'une fonction rationnelle

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^3}$.
2. En déduire une primitive F de f sur $]-1; +\infty[$.

Primitive avec $\ln$ et $\exp$

Exercice n°5 Déterminer une primitive d'une fonction du type $u'u^{-1}$

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad I =]-1; +\infty[$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad I =]-\infty; -1[$
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{x^2-4} \quad I =]2; +\infty[$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} \quad I = \mathbb{R}$
5. $f_5(x) = \dfrac{\ln x}{x} \quad I = \mathbb{R}_+^\star$

Exercice n°6 Déterminer une primitive d'une fonction du type $u'e^u$

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{4}e^x \qquad f_2(x) = e^{-x} \qquad f_3(x) = xe^{x^2} \qquad f_4(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Exercice n°7 Déterminer une primitive d'une fonction

Déterminer une primitive des fonctions suivantes (sans se soucier des problèmes d'existence) :

1. $f_1(x) = \dfrac{2x}{(4+x^2)^2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{3x^2}{1+4x^3}$
4. $f_4(x) = \dfrac{2x+1}{3x^2+3x+7}$
5. $f_5(x) = (6x+3)\sqrt{x^2+x+1}$
6. $f_6(x) = \sqrt{5x+4}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
8. $f_8(x) = 2x(3x^2-1)^3$
9. $f_9(x) = \dfrac{x^2}{(x^3-2)^2}$
10. $f_{10}(x) = \dfrac{2x+5}{(x^2+5x+8)^4}$
11. $f_{11}(x) = \dfrac{\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}$
12. $f_{12}(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
13. $f_{13}(x) = \dfrac{1}{(3x-2)^4}$
14. $f_{14}(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$
15. $f_{15}(x) = \dfrac{x^4}{2+x}$