TP - Sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On considère $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice carrée d'ordre n.

1 Sommes doubles carrées (indices indépendants)

Objectif : On souhaite calculer la somme des coefficients de la matrice A.

Définition

La somme des n^2 coefficients de A est notée : $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$ ou encore $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}$.

Cette somme est "double" car elle fait intervenir deux indices : i l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

Exemples : 1) Pour $n = 3$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ et la somme des coefficients de A est :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 3} a_{i,j} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}.$$

2) Si $A = (i \times j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 2 & 1 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3 \times 3 \end{bmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i,j \leq 3} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} ij &= 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 \\ &= 1 \times (1+2+3) + 2 \times (1+2+3) + 3 \times (1+2+3) \\ &= (1+2+3) \times (1+2+3) \\ &= 36 \end{aligned}$$

Sommation par lignes, par colonnes

Pour calculer la somme des coefficients de $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, on peut :

(i) commencer par déterminer la somme des coefficients de la ligne i, puis sommer les résultats obtenus ;

(ii) commencer par déterminer la somme des coefficients de la colonne j, puis sommer les résultats obtenus.

Le résultat suivant résume cela :

Théorème

(i) $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la ligne } i}$ (on commence par fixer la ligne i dont on calcule la somme (d'indice j) des coefficients, puis on somme les résultats)

(ii) $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la colonne } j}$ (on commence par fixer la colonne j dont on calcule la somme (d'indice i) des coefficients, puis on somme les résultats)

Sommer sur les lignes ou colonnes permet de se ramener à deux calculs de sommes sur un seul indice

Exercices : Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Calculer les sommes doubles :

$$S_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} 1, \quad S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} i, \quad S_3 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j), \quad S_4 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$$

2 Sommes doubles triangulaires (indices dépendants)

Objectif : On souhaite calculer la somme des coefficients de la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ qui sont

- au-dessus de la diagonale (ou en-dessous)
- strictement au-dessus de la diagonale (ou strictement en-dessous)

Remarques :

1) Le coefficient $a_{i,j}$ est sur la diagonale lorsque $i = j$. Il y a n tels coefficients.

2) Le coefficient $a_{i,j}$ est au-dessus de la diagonale lorsque $i \le j$ (resp. en-dessous lorsque $j \le i$).
Il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ tels coefficients.

3) Le coefficient $a_{i,j}$ est strictement au-dessus de la diagonale lorsque $i < j$ (resp. strictement en-dessous lorsque $j < i$).
Il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tels coefficients.

Définition

- La somme des coefficients de A au-dessus de la diagonale (resp. en-dessous) est notée :

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j} \quad (\text{resp. } \sum_{1\le j\le i\le n} a_{i,j})$$

- La somme des coefficients de A strictement au-dessus de la diagonale (resp. strictement en-dessous) est notée :

$$\sum_{1\le i< j\le n} a_{i,j} \ (\text{resp. } \sum_{1\le j< i\le n} a_{i,j})$$

Exemples : Pour $n = 3$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

1) La somme des coefficients au-dessus de la diagonale de A est : $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le 3} a_{i,j} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{22} + a_{23} + a_{33}$.

2) La somme des coefficients strictement au-dessus de la diagonale de A est : $\displaystyle\sum_{1\le i< j\le 3} a_{i,j} = a_{12} + a_{13} + a_{23}$.

Sommation par lignes, par colonnes

On traite le calcule des sommes $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{1\le i< j\le n} a_{i,j}$.

On peut, comme dans le cas des sommes carrées, se ramener à deux calculs de sommes sur un seul indice. En effet, on a :

- Cas $1 \le i \le j \le n$
  - Si on fixe la ligne $1 \le i \le n$ alors $i \le j \le n$ en termes de sommes : $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} = \sum_{1\le i\le n}\left(\sum_{i\le j\le n}\right)$
  - Si on fixe la colonne $1 \le j \le n$ alors $1 \le i \le j$ en termes de sommes : $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} = \sum_{1\le j\le n}\left(\sum_{1\le i\le j}\right)$
- Cas $1 \le i < j \le n$
  - Si on fixe la ligne $1 \le i < n$, ie $1 \le i \le n-1$ alors $i < j \le n$, ie $i+1 \le j \le n$ en termes de sommes

$$\sum_{1\le i<j\le n} = \sum_{1\le i\le n-1}\left(\sum_{i+1\le j\le n}\right)$$

  - Si on fixe la colonne $1 < j \le n$, ie $2 \le j \le n$ alors $1 \le i < j$, ie $1 \le i \le j-1$ en termes de sommes

$$\sum_{1\le i<j\le n} = \sum_{2\le j\le n-1}\left(\sum_{1\le i\le j-1}\right)$$

Ce qui nous amène au résultat :

Théorème

(i) $$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$$

(ii) $$\sum_{1\leq i< j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right)$$

Exercices : 1) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Calculer les sommes doubles :

$$S_1 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij, \quad S_2 = \sum_{1\leq i< j\leq n} \frac{i}{j}, \quad S_3 = \sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^j$ de deux façons différentes. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.