Complément de cours - Chapitre 3 : Partie entière

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la partie entière de x comme étant le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$ (ainsi $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$).

Exemples : $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$; $\lfloor \pi \rfloor = 3$; $\lfloor -6,1 \rfloor = -7$; $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$.

Théorème :

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $\lfloor x \rfloor$ est l'unique nombre entier relatif tel que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

(iii) (Résolution d'équation) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = a \iff a \leq x < a + 1$$

Exemple : Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x + 1 \rfloor = 7$.

- L'ensemble de définition de cette équation est $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, en utilisant le point (iii) du Théorème précédent :

$$\lfloor 2x + 1 \rfloor = 7 \iff 7 \leq 2x + 1 < 8 \iff 3 \leq x < \frac{7}{2}.$$

- Donc l'ensemble des solutions est $\left[3, \frac{7}{2}\right[$.

Théorème :
Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \lfloor x \rfloor$. La fonction f est appelée "fonction partie entière".

(i) (Régularité) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(ii) (Variation) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Représentation :