Complément de cours - Chapitre 2 : Polynômes

Les relations coefficients-racines pour les polynômes du second degré

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On considère le polynôme du second degré P défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c$.

On suppose que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de P est positif et on note ses racines x_1 et x_2 (éventuellement $x_1 = x_2$ lorsque $\Delta = 0$). Dans ce cas, on sait que P se factorise sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\
&= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) \\
&= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, par identification des coefficients, on obtient : $\begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ a x_1 x_2 = c \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}}$

Ces deux dernières égalités se nomment $\boxed{\text{“relations coefficients-racines”}}$ et permettent d'obtenir des informations (valeurs, signes) sur les racines x_1 et x_2 de P, directement à partir des coefficients a, b, c.

Remarque : Dans le cas où $a = 1$, ces relations s'écrivent : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases}$.

Utilisations :

1. **Pour déterminer la valeur d'une racine si on en connaît déjà une.**

   Par exemple, $x_1 = 1$ est une racine évidente de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ (au passage, cela nous assure que le discriminant est positif). L'autre racine x_2 vérifie nécessairement la relation $x_1 x_2 = 2$, ainsi $x_2 = 2$.

   Autre exemple $x_1 = 1$ est une racine évidente de l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$. L'autre racine x_2 vérifie nécessairement la relation $x_1 x_2 = \dfrac{-1}{2}$, ainsi $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

2. **Pour déterminer le signe des racines x_1 et x_2**

   - Si a et c sont de même signe, on a $\dfrac{c}{a} \geq 0$ et donc x_1, x_2 sont de même signe (celui de $-\dfrac{b}{a}$) ;
   - Si a et c sont de signe contraire, on a $\dfrac{c}{a} \leq 0$ et donc x_1, x_2 sont de signes contraires.

   Par exemple, on considère la polynôme du second degré $x^2 - 24x + 44$ (le discriminant est strictement positif). En notant x_1 et x_2 ses racines, on a : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{-24}{1} = 24 > 0 \ (\star) \\ x_1 x_2 = \dfrac{44}{1} = 44 > 0 \ (\star\star) \end{cases}$. La relation $(\star\star)$ nous assure que x_1 et x_2 sont de même signe et, ensuite, $(\star)$ nous assure que x_1 et x_2 sont positifs.

Exercices :

1. Déterminer une racine évidente à chacun des polynômes du second degré suivants et, à l'aide des relations coefficients-racines, déduire directement l'autre racine.

   $$P_1(x) = x^2 - 10x - 11 \qquad P_2(x) = 3x^2 - 4x - 4 \qquad P_3(x) = -7x^2 + 4x + 3$$

2. On admet que les polynômes de degré deux suivants ont un discriminant positif. Déterminer, pour chaque polynôme, le signe de ses racines.

   $$P_1(x) = -x^2 + 12x - 32 \qquad P_2(x) = 7x^2 + 21x - 13 \qquad P_3(x) = 2x^2 + 99x + 29$$