Corrections du travail des vacances de la Toussaint

Exercice n°1 Un peu de tout

Les questions de cet exercices sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire l'expression suivante sous la forme $e^{g(x)}$ où $g(x)$ est à déterminer :

$$A = \frac{e^{3x+1}}{e^{(x+1)^2}} \times \left(e^{\ln\left(e^{x^2+1}\right)}\right)^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{3x+1}}{e^{(x+1)^2}} \times \left(e^{\ln\left(e^{x^2+1}\right)}\right)^2 \\ &= \frac{e^{3x+1}}{e^{(x+1)^2}} \times \left(e^{x^2+1}\right)^2 \\ &= \frac{e^{3x+1}}{e^{(x+1)^2}} \times e^{2(x^2+1)} \\ &= e^{(3x+1)-(x+1)^2} \times e^{2(x^2+1)} \\ &= e^{(3x+1)-(x+1)^2+2(x^2+1)} \\ &= e^{x^2+x+2}. \end{aligned}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\quad (E) : \sqrt{x+3} = x+1$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

L'ensemble de définition de cette équation est $D_{(E)} = [-3; +\infty[$.

- *Analyse : On considère une éventuelle solution $x \in D_{(E)}$. On a alors :*

$$\begin{aligned} x \text{ solution de (E)} &\implies \sqrt{x+3} = x+1 \\ &\implies x+3 = (x+1)^2 \\ &\implies x^2 + x - 2 = 0 \\ &\implies x = 1 \ \boxed{ou} \ x = -2 \end{aligned}$$

Donc, si x est solution de (E) alors nécessairement $x = 1$ ou $x = -2$.

- *Synthèse : On regarde, parmi les solutions envisageables, celles qui sont effectivement solutions de l'équation (E).*

  1 est bien solution de (E) car : $\sqrt{1+3} = 2$ et $1+1 = 2$

  -2 n'est pas solution de (E) car $\sqrt{-2+3} = 1$ et $-2+1 = -1$.

Conclusion : l'équation (E) possède une unique solution réelle qui est 1.

3. Montrer, **en raisonnant par récurrence sur** $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (5+3k) = \frac{(n+1)(3n+10)}{2}.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (5+3k) = \frac{(n+1)(3n+10)}{2}$ ».

- *$\mathscr{P}(0)$ est vraie, en effet : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} (5+3k) = 5 + 5 \times 0 = 5$ et $\dfrac{(0+1)(0+10)}{2} = 5$.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} (5+3k) = \frac{((n+1)+1)(3(n+1)+10)}{2} = \frac{(n+2)(3n+13)}{2}$ ».*

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(5+3k) &= \left(\sum_{k=0}^{n}(5+3k)\right)+(5+3(n+1))\\ &= \frac{(n+1)(3n+10)}{2}+(5+3(n+1)) \quad \textit{[Par hypothèse de récurrence]}\\ &= \frac{(n+1)(3n+10)+10+6(n+1)}{2}\\ &= \frac{3n^2+19n+26}{2}\\ &= \frac{(n+2)(3n+13)}{2}\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Par le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Comment peut-on montrer cette égalité **sans raisonner par récurrence**? (Deux méthodes possibles, au moins).

Au moins deux autres méthodes sont envisageables pour calculer cette somme.

- On remarque directement que la suite $(5+3n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3. Ainsi, d'après le cours :

$$\sum_{k=0}^{n}(5+3k) = \frac{\overbrace{(n+1)}^{\text{nombre de termes}} \times \overbrace{(5+3\times 0)+(5+3n))}^{\text{premier + dernier terme}}}{2} = \frac{(n+1)(3n+10)}{2}.$$

- On utilise la linéarité et les valeurs des sommes usuelles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(5+3k) &= \sum_{k=0}^{n}5+3\sum_{k=0}^{n}k \quad \text{[Par linéarité]}\\ &= 5(n+1)+3\frac{n(n+1)}{2}\\ &= (n+1)\left(5+\frac{3n}{2}\right)\\ &= \frac{(n+1)(3n+10)}{2}\end{aligned}$$

Exercice n°2 Sur les suites

On se propose de déterminer par deux méthodes l'expression explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = v_0 = 1$ et les relations de récurrences suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$$

Les questions 2. et 3. sont indépendantes et on n'utilisera pas le résultat de la question 2. pour la question 3.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 2$.

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $u_n + v_n = 2$ ».

   - *$\mathscr{P}(0)$ est vraie, en effet : $u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$: « $u_{n+1} + v_{n+1} = 2$ ».*

     On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1}+v_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{2}v_n\right)+\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{2}v_n\right)\\ &= u_n+v_n\\ &= 2 \quad \textit{[Par hypothèse de récurrence]}\end{aligned}$$

     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   - *Par le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2. <u>Première méthode :</u>

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n + \frac{2}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la question pécédente, on sait que $u_n + v_n = 2$, autrement dit : $u_n = 2 - v_n$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ &= \frac{1}{3}(2 - v_n) + \frac{1}{2}v_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) v_n + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6}v_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(b) **Python :**

Ecrire un script Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel n non nul et qui affiche les valeurs v_k pour $k \in [\![1; n]\!]$.

```
n=int(input("Entrez un nombre entier positif non nul")
v0=1
for i in range(n):
      v0=(1/6)*v0+2/3
      print(v0)
```

(c) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On applique la méthode permettant de déterminer son expression explicite :

- *On détermine $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(v_n - \ell)$ soit une suite géométrique. La cours nous assure que $\ell = \frac{b}{1-a}$ où $a = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{2}{3}$.*
  Ainsi $\ell = \frac{2/3}{1-1/6} = \frac{4}{5}$. Montrons que la suite $\left(v_n - \frac{4}{5}\right)$ est géométrique de raison $a = \frac{1}{6}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  $$v_{n+1} - \frac{4}{5} = \left(\frac{1}{6}v_n + \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{5} = \frac{1}{6}v_n - \frac{2}{15} = \frac{1}{6}\left(v_n - \frac{4}{5}\right).$$
  Donc $\left(v_n - \frac{4}{5}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 - \frac{4}{5} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.
- *On explicite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
  D'après ce qui précède, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.
  En fin de compte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - v_n = 2 - \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3. <u>Deuxième méthode :</u>

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la première égalité, on sait que : $v_n \overset{(\star)}{=} 2u_{n+1} - \frac{4}{3}u_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{2}v_{n+1} \quad \textit{[1ère égalité en } n+1\textit{]} \\ &= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n\right) \quad \textit{[2nd égalité]} \\ &= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ &= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{4}\left(2u_{n+1} - \frac{4}{3}u_n\right) \quad \textit{[en utilisant } (\star)\textit{]} \\ &= \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n \end{aligned}$$

(b) En déduire u_n en fonction de n, puis v_n en fonction de n.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, ses deux premiers termes sont $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{2}v_0 = \frac{2}{3}.1 + \frac{1}{2}.1 = \frac{7}{6}$. On applique la méthode permettant de déterminer son expression explicite :

- *On introduit l'équation caractéristique, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $(E) : x^2 = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$, i.e. $(E) : x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{6} = 0$.*

  Le discriminant de (E) est $\left(-\frac{7}{6}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{36} > 0$ et (E) possède deux solutions réelles distinctes :

$$\frac{\frac{7}{6} - \sqrt{\frac{25}{36}}}{2} = \frac{1}{6} \qquad \textit{et} \qquad \frac{\frac{7}{6} + \sqrt{\frac{25}{36}}}{2} = 1.$$

  Ainsi, le cours nous assure qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda 1^n + \mu \left(\frac{1}{6}\right)^n = \lambda + \mu \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

- *On détermine λ, μ à l'aide des conditions initiales. On a :*

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \frac{7}{6} \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \frac{\mu}{6} = \frac{7}{6} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ (1-\mu) + \frac{\mu}{6} = \frac{7}{6} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ \mu = -\frac{1}{5} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = \frac{6}{5} \\ \mu = -\frac{1}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

  Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $v_n = 2 - u_n = 2 - \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$. On retrouve bien les résultats obtenus à la question précédente.

Exercice n°3 Sur les polynômes et les sommes

1. On considère le polynôme P défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $P(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$.

   (a) Déterminer une racine évidente de P puis factoriser P en un produit de polynômes de degré un.

   Il est clair que -1 est racine évidente. On sait donc que le polynôme $x - (-1) = x + 1$ divise le polynôme $x^3 + 8x^2 + 19x + 12$. Autrement dit, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+1)Q(x)$. On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$ pour trouver $Q(x)$. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x^2 + 7x + 12$. Le polynôme $Q(x)$ est un trinôme du second degré de discriminant $7^2 - 4 \times 12 = 1 > 0$ et possède donc deux racines réelles distinctes : $\frac{-7-\sqrt{1}}{2} = -4$ et $\frac{-7+\sqrt{1}}{2} = -3$. On en déduit la factorisation de $Q(x)$ suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x+3)(x+4)$.
   En conclusion, la factorisation de $P(x)$ recherchée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+1)(x+3)(x+4).$$

   (b) Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{x^3 + 8x^2 + 19x + 12} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x+4} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{3}.$$

   D'après la question précédente, la quantité $\frac{1}{P(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ est bien définie car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0 \iff x \in \{-1; -3; -4\}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x+4} &= \frac{a(x+3)(x+4) + b(x+1)(x+4) + c(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+4)} \\
&= \frac{(a+b+c)x^2 + (7a+5b+4c)x + (12a+4b+3c)}{(x+1)(x+3)(x+4)} \\
&= \frac{(a+b+c)x^2 + (7a+5b+4c)x + (12a+4b+3c)}{x^3 + 8x^2 + 19x + 12}
\end{aligned}$$

   On a : $a + b + c = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$, $7a + 5b + 4c = \frac{7}{6} - \frac{5}{2} + \frac{4}{3} = \frac{7}{6} - \frac{15}{6} + \frac{8}{6} = 0$ et $12a + 4b + 3c = \frac{12}{6} - \frac{4}{2} + \frac{3}{3} = 1$.
   On obtient bien l'égalité recherchée.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{1}{n^3+8n^2+19n+12}$.

   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

   La quantité $\dfrac{1}{P(x)}$ *étant bien définie pour* $x \in \mathbb{R}_+$*, la quantité* $u_n = \dfrac{1}{P(n)}$ *l'est en particulier pour* $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}$. Réécrire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ à l'aide de la question 1.(b). Préciser la propriété utilisée.

   Soit $N \in \mathbb{N}$*. En utilisant la propriété de linéarité, on peut écrire :*

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^3+8n^2+19n+12} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\frac{1}{6}}{n+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{n+3} + \frac{\frac{1}{3}}{n+4}\right) = \frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+3}\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+4}\right).$$

   (c) Vérifier, à l'aide d'un changement d'indice, que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+3} = \sum_{n=2}^{N+2}\frac{1}{n+1}$ et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+4} = \sum_{n=3}^{N+3}\frac{1}{n+1}$.

   On effectue deux changements d'indices :

   — *On effectue le changement d'indice j=n+2 dans la somme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+3}$.

   Ainsi, si $0 \leqslant n \leqslant N$ *(*n *décrit* $[\![0;N]\!]$*), on a* $0+2 \leqslant n+2 \leqslant N+2$ *i.e.* $2 \leqslant j \leqslant N+2$ *(*j *décrit* $[\![2;N+2]\!]$*).*

   On obtient :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+3} = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+2)+1} \overset{j=n+2}{=} \sum_{j=2}^{N+2}\frac{1}{j+1} = \sum_{n=2}^{N+2}\frac{1}{n+1}.$$

   — *On effectue le changement d'indice p=n+3 dans la somme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+4}$.

   Ainsi, si $0 \leqslant n \leqslant N$ *(*n *décrit* $[\![0;N]\!]$*), on a* $0+3 \leqslant n+3 \leqslant N+3$ *i.e.* $3 \leqslant p \leqslant N+3$ *(*p *décrit* $[\![3;N+3]\!]$*).*

   On obtient :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+4} = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+3)+1} \overset{p=n+3}{=} \sum_{p=3}^{N+3}\frac{1}{p+1} = \sum_{n=3}^{N+3}\frac{1}{n+1}.$$

   (d) Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{5}{36} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\frac{1}{N+4}\right).$$

   Pour conclure, on exprime les sommes $\displaystyle\sum_{n=2}^{N+2}\frac{1}{n+1}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=3}^{N+3}\frac{1}{n+1}$ *en fonction de la somme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}$*. On a :*

$$\sum_{n=2}^{N+2}\frac{1}{n+1} = \left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right) - \left(\frac{1}{1+1}+\frac{1}{0+1}\right) = \left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} - \frac{1}{2} - 1$$

   de même :

$$\sum_{n=3}^{N+3}\frac{1}{n+1} = \left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1.$$

   En combinant les deux questions précédentes et les deux relations qui viennent d'être établies, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+3}\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+4}\right) \quad \text{[question (b)]}\\
&= \frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N+2}\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=3}^{N+3}\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{[question (c)]}\\
&= \frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} - \frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)\\
&= \overbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}^{=0}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} - \frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4}\right)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4}\right)\\
&= \frac{9+18-4-6-12}{36} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4}\right)\\
&= \frac{5}{36} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui conclut l'exercice.

Exercice n°4 Sur les fonctions

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

   On admet dans la suite que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathscr{D}_f \iff \begin{cases} 2-x \neq 0 \\ \dfrac{2+x}{2-x} \geqslant 0 \\ \sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{2+x}{2-x} > 0 \end{cases} \iff x \in]-2;2[\quad \textit{[faire un tableau de signe !]}$$

   Donc $\mathscr{D}_f =]-2;2[$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

   Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right) = 1 &\iff \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = e^1\\
&\iff \frac{2+x}{2-x} = (e^1)^2 \quad \textit{[Pourquoi peut-on élever au carré ?]}\\
&\iff 2+x = e^2(2-x)\\
&\iff 2-2e^2 = x(-e^2-1)\\
&\iff x = \frac{2-2e^2}{-e^2-1} = \frac{2(e^2-1)}{e^2+1}
\end{aligned}$$

   L'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui est $\frac{2(e^2-1)}{e^2+1}$.

   Remarquez que $0 < e^2 - 1 < e^2 + 1$, d'où $0 < \frac{e^2-1}{e^2+1} < 1$ et $0 < \frac{2(e^2-1)}{e^2+1} < 2$, donc $\frac{2(e^2-1)}{e^2+1} \in \mathscr{D}_f$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right) \geqslant 0 &\iff \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \geqslant e^0 \\
&\iff \frac{2+x}{2-x} - 1 \geqslant 0 \\
&\iff \frac{(2+x)-(2-x)}{2-x} \geqslant 0 \\
&\iff \frac{2x}{2-x} \geqslant 0 \\
&\iff x \geqslant 0 \quad \textit{[car } 2-x>0 \textit{ pour } x \in]-2;2[\textit{]} \\
&\iff x \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+ = [0;2[$.

4. Déterminer, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x)$.

Il y a plusieurs manières de procéder. Soit $x \in \mathscr{D}_f$.

— *Sans se poser trop de questions... :*

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\ln\left(\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)\right)' \\
&= \left(\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)' \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}} \\
&= \left(\frac{2+x}{2-x}\right)' \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}} \\
&= \frac{(2+x)'(2-x)-(2+x)(2-x)'}{(2-x)^2} \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)^2} \\
&= \frac{4}{(2-x)^2} \frac{1}{2\frac{2+x}{2-x}} \\
&= \frac{4 \times (2-x)}{2 \times (2-x)^2 \times (2+x)} \\
&= \frac{2}{(2-x)(2+x)}
\end{aligned}$$

— *Autre méthode, en utilisant les propriétés de* $\ln$ *:*

$$\begin{aligned}
g(x) &= \ln\left(\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(2+x) - \ln(2-x)\right) \quad \textit{[car } 2+x>0 \textit{ et } 2-x>0\textit{]}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{2}\left((\ln(2+x))' - (\ln(2-x))'\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(2+x)'}{2+x} - \frac{(2-x)'}{2-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right) \\
&= \frac{2}{(2-x)(2+x)}
\end{aligned}$$

5. Etablir le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les interpréter en termes d'asymptotes horizontales ou verticales.

Pour tout $x \in]-2;2[$, on a $g'(x) > 0$ car $2+x>0$ et $2-x>0$. Ainsi, le tableau de variation de f est donné par :

x	-2		0		2
$f'(x)$			$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Calculs des limites en 2^- et -2^+ :

— *Comme :* $2+x \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} 4$ *et* $2-x \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} 0^+$, *on a* $\dfrac{2+x}{2-x} \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} +\infty$.

D'autre part : $\sqrt{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $\ln X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On conclut que : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\right) \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $\mathscr{C}_f$ *possède une asymptote verticale d'équation* $x=2$.

— *Comme :* $2+x \underset{x\to -2^+}{\longrightarrow} 0^+$ *et* $2-x \underset{x\to -2^+}{\longrightarrow} 4$, *on a* $\dfrac{2+x}{2-x} \underset{x\to -2^+}{\longrightarrow} 0^+$.

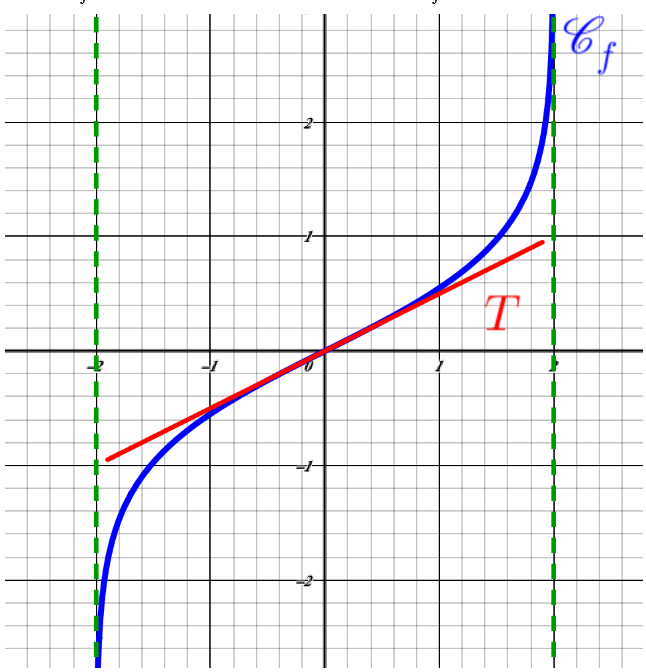
D'autre part : $\sqrt{X} \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$ *et* $\ln X \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

On conclut que : $\ln\left(\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\right) \underset{x\to -2^+}{\longrightarrow} -\infty$ *et* $\mathscr{C}_f$ *possède une asymptote verticale d'équation* $x=-2$.

6. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ *au point d'abscisse* 0 *est* $T:\ y = f'(0)(x-0)+f(0)$. *Or* $f'(0) = \dfrac{2}{(2+0)(2-0)} = \dfrac{1}{2}$ *et* $f(0) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{2+0}{2-0}}\right) = \ln(1) = 0$. *Donc* $T:\ y = \dfrac{1}{2}(x-0)+0 = \dfrac{x}{2}$.

7. Dans un repère, tracer les asymptotes à $\mathscr{C}_f$ et T. Tracer alors l'allure de $\mathscr{C}_f$.



8. **Python**

Ecrire une fonction Python f prenant pour argument x et qui renvoie la valeur de $f(x)$ si $x \in \mathscr{D}_f$ et la chaîne de caractère : "x n'appartient pas à $\mathscr{D}_f$" lorsque $x \notin \mathscr{D}_f$.

```
from math import*
def f(x):
    if x<=-2 or x>=2:
        print(str(x)+" n'est pas dans l'ensemble de définition de f")
    else:
        return log(sqrt((2+x)/(2-x)))
```