# Devoir libre n°1, correction

## Exercice n°1 Utilisation des nombres complexes

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Montrer que : $\dfrac{(2+i)^2}{7+i} = \dfrac{1+i}{2}$.

   *On a :* $\dfrac{(2+i)^2}{7+i} = \dfrac{(3+4i)(7-i)}{|7+i|^2} = \dfrac{25+25i}{50} = \dfrac{1+i}{2}$.

   *Donc* $\boxed{\dfrac{(2+i)^2}{7+i} = \dfrac{1+i}{2}}$.

   (b) En déduire la relation : $2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

   *Grâce à la question 1. (a), on a* $arg\left(\dfrac{(2+i)^2}{7+i}\right) \equiv arg\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\ [2\pi]$, *et comme :*

   - $arg\left(\dfrac{(2+i)^2}{7+i}\right) \equiv arg((2+i)^2) - arg(7+i) \equiv 2\,arg(2+i) - arg(7+i) \equiv 2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right)\ [2\pi]$
   - $arg\left(\dfrac{1+i}{2}\right) \equiv arg(1+i) \equiv \arctan(1) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

   *On en déduit que :* $2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

   *Cette dernière relation signifie seulement que* $2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right)$ *et* $\dfrac{\pi}{4}$ *sont égaux à $2\pi$ près.*

   *Pour conclure, on commence par encadrer les quantités* $2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *et* $\arctan\left(\dfrac{1}{7}\right)$ *:*

   - *par exemple,* $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, *on a par stricte croissance de* arctan *sur* $\mathbb{R}$ *:*

   $$0 < 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \underbrace{2\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{2}}$$

   - *de même on obtient* $0 < \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) < \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}}$.

   *On en déduit l'encadrement :* $-\dfrac{\pi}{4} < 2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) < \dfrac{\pi}{2}$.

   *Le seul représentant de* $\dfrac{\pi}{4}$ *modulo* $2\pi$ *dans l'intervalle* $\left]-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ *étant* $\dfrac{\pi}{4}$, *on conclut qu'on a bien*

   $$\boxed{2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}}.$$

2. Soit $a \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

   $$(E) : \quad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = \frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}.$$

   (a) Mettre $\dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}$ sous forme trigonométrique (on utilisera $\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$).

   *Comme* $a \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, *on a* $\cos(a) > 0$ *et* $1 - i\tan(a) \neq 0$. *On peut alors écrire :*

   $$\frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)} = \frac{1+i\frac{\sin(a)}{\cos(a)}}{1-i\frac{\sin(a)}{\cos(a)}} = \frac{\cos(a)+i\sin(a)}{\cos(a)-i\sin(a)} = \frac{e^{ia}}{e^{-ia}} = e^{i(2a)}.$$

   *Donc* $\boxed{\dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)} = e^{i(2a)}}$.

(b) En déduire les solutions de l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ : $\quad Z^5 = \dfrac{1 + i\tan(a)}{1 - i\tan(a)}$.

*Pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\begin{aligned}
Z^5 = \frac{1 + i\tan(a)}{1 - i\tan(a)} &\iff Z^5 = e^{i(2a)} \\
&\iff Z^5 = \left(e^{i\frac{2a}{5}}\right)^5 \\
&\iff \left(\frac{Z}{e^{i\frac{2a}{5}}}\right)^5 = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ \frac{Z}{e^{i\frac{2a}{5}}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k \\
&\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ Z = \left[e^{i\frac{2a}{5}}\right]\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k \\
&\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ Z = e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}}
\end{aligned}$$

*Les solutions sont donc :* $\boxed{e^{i\frac{2a}{5}}, \quad e^{i\frac{2(a+\pi)}{5}}, \quad e^{i\frac{2(a+2\pi)}{5}}, \quad e^{i\frac{2(a+3\pi)}{5}} \quad \textit{et} \quad e^{i\frac{2(a+4\pi)}{5}}}$.

(c) Proposer une simplification de l'expression $\dfrac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)}$. Vous préciserez également le domaine de validité de cette relation.

*L'expression $\dfrac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)}$ est bien définie pour les valeurs $\theta$ telles que $e^{i\theta} + 1 \neq 0$, i.e. lorsque $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$.*
*Ainsi, pour tout $\theta$ réel tel que $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$, on a*

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)} &= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \quad \textit{[Formule d'Euler]} \\
&= \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

*Donc* $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}\backslash\{\theta \equiv \pi\ [2\pi]\}, \quad \frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

(d) Déduire les solutions de $(E)$ des deux questions précédentes.

*L'ensemble de résolution de $(E)$ est $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid 1 - iz = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{-i\}$.*

*Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$, $z$ est solution de $(E)$ si et seulement si $\dfrac{1 + iz}{1 - iz}$ est une racine 5-ième de $\dfrac{1 + i\tan(a)}{1 - i\tan(a)}$.*
*De la question (b), on déduit que :*

$$\begin{aligned}
z \textit{ solution de } (E) &\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}} \\
&\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ iz(1 + e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}}) = 1 - e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}} \\
&\overset{(\star)}{\iff} \exists k \in [\![0;4]\!],\ z = \frac{1 - e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}}}{i\left(1 + e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}}\right)} \\
&\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ z = \tan\left(\frac{a + k\pi}{5}\right) \quad \textit{[Par la question (c)]}
\end{aligned}$$

*L'équivalence $(\star)$ est à justifier. Montrons que, pour tout $k \in [\![0;4]\!]$, $e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}} \neq -1$.*
*Soit $k \in [\![0;4]\!]$, on a*

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}} = -1 &\iff e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}} = e^{i\pi} \\
&\iff \exists k' \in \mathbb{Z},\ \frac{2(a + k\pi)}{5} = \pi + k'2\pi \\
&\iff \exists k' \in \mathbb{Z},\ a = \frac{\pi}{2} + \pi\left(5k' - k + 2\right)
\end{aligned}$$

*En particulier, pour que $e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}} = -1$, il est nécessaire que $a \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, or $a \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc, pour tout $k \in [\![0;4]\!]$, $1+e^{i\frac{2(a+k\pi)}{5}} \neq 0$.*
*Enfin, pour tout $k \in [\![0;4]\!]$, $\tan\left(\dfrac{a+k\pi}{5}\right) \in \mathbb{R}$, en particulier ces valeurs sont différentes de $-i$.*

*En conclusion, l'ensemble des solutions de $(E)$ est $\boxed{\left\{\tan\left(\dfrac{a+k\pi}{5}\right) \;\middle|\; k \in [\![0;4]\!]\right\}}$.*

## Exercice n°2 Etablir une relation avec arctan et calcul d'une somme

1. Dans cette question, on cherche à établir la relation :

$$(\star):\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \arctan(x+1)-\arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

(a) **Méthode n°1 :**

(i) Etudier la fonction $f : x \mapsto \arctan(x+1)-\arctan(x)-\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$.

*Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} > 0$, ainsi la fonction $f$ est définie et dérivable, par les théorèmes généraux, sur $\mathbb{R}$.*
*Soit $x \in \mathbb{R}$. On a de plus :*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2}\times\frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\\
&= \frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x+1}{1+(1+x+x^2)^2}\\
&= \frac{1+x^2}{(1+(1+x)^2)(1+x^2)}-\frac{1+(1+x)^2}{(1+(1+x)^2)(1+x^2)}+\frac{2x+1}{1+(1+x+x^2)^2}\\
&= \frac{-2x-1}{(1+(1+x)^2)(1+x^2)}+\frac{2x+1}{1+(1+x+x^2)^2}
\end{aligned}$$

*En remarquant que :*

$$\begin{aligned}
1+(1+x+x^2)^2 &= 1+((x^2+1)+x)^2\\
&= 1+(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+x^2\\
&= (1+x^2)(x^2+2x+2)\\
&= (1+x^2)(1+(1+x)^2),
\end{aligned}$$

*on obtient $f'(x)=0$. Donc la dérivée de $f$ est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.*
*Comme $f(0)=\arctan(1)-\arctan(0)-\arctan(1)=0$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}}$.*

(ii) En déduire $(\star)$.

*La fonction $f$ étant nulle sur $\mathbb{R}$, la relation $(\star)$ s'en déduit immédiatement.*

(b) **Méthode n°2 :**

(i) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad 0 < \arctan(x+1)-\arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$.

*Introduisons la fonction $g : x \mapsto \arctan(x+1)-\arctan(x)$ qui est définie et dérivable, par les théorèmes généraux, sur $\mathbb{R}$.*

*Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (voir question précédente) : $g'(x) = \dfrac{1}{1+(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x^2} = -\dfrac{2x+1}{(1+x^2)(1+(1+x)^2)}$.*

*Le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $-(2x+1)$, on en déduit le tableau de variation suivant (le calcul des limites ne donne lieu à aucune forme indéterminée) :*

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $2\arctan(1/2)$ | $\searrow$ | $0$ |

*Comme* $2\arctan(1/2) < 2\overbrace{\arctan(1)}^{=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{2}$*, on déduit que :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \overbrace{\arctan(x+1) - \arctan(x)}^{=g(x)} < \frac{\pi}{2}}.$$

(ii) Comparer (après avoir justifié leurs existences) les tangentes des deux membres de $(\star)$.

*Soit* $x \in \mathbb{R}$*, la question précédente nous assure que* $\arctan(x+1) - \arctan(x) \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ *et on sait que* $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan(x+1) < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$.

*Cela nous permet d'écrire :*

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan(x+1) - \arctan(x)) &= \frac{\tan(\arctan(x+1)) - \tan(\arctan(x))}{1 + \tan(\arctan(x+1))\tan(\arctan(x))} \\
&= \frac{(x+1) - x}{1 + (x+1)x} \\
&= \frac{1}{1 + x + x^2} \\
&= \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Les tangentes des deux membres de l'égalité } (\star) \textit{ sont égales}}$.

(iii) En déduire $(\star)$.

*On a montré que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, les quantités* $\arctan(x+1) - \arctan(x)$ *et* $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$ *ont la même tangente. Or,* $\arctan(x+1) - \arctan(x) \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et* $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

*Donc, comme* $\tan$ *réalise une bijection de* $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$*, on a*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

*On a, grâce à la relation* $(\star)$ *:*

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k)) \quad \textit{[On reconnaît une somme télescopique]} \\
&= \arctan(n+1) - \arctan(1) \\
&= \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

*Donc* $\boxed{S_n = \arctan(n+1) - \dfrac{\pi}{4}}$.

*On en déduit que :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

*En conclusion* $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}}$.

## Exercice n°3 Quelques calculs de sommes trigonométriques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$
Cette somme a déjà été calculée en cours à l'aide des nombres complexes, on propose ici un méthode alternative utilisant les propriétés de la somme et le formulaire de trigonométrie.
On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $S_n(x) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)\right]$.

   *Comme* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ *on a, par linéarité,* $S_n(x) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\cos(kx) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$. *En utilisant (voir formulaire) le fait que, pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$*, on obtient par linéarité :*
$$S_n(x) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left[\sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)\right]$$

   (b) Montrer que
$$S_n(x) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

   *En effectuant le changement d'indice* $j = k+1$*, on obtient :*
$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \sin\left((j-1)x + \frac{x}{2}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \sin\left(jx - \frac{x}{2}\right) = \overbrace{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}^{=\sin\left((n+1)x - \frac{x}{2}\right)} + \left[\sum_{j=0}^{n} \sin\left(jx - \frac{x}{2}\right)\right] \overbrace{+ \sin\left(\frac{x}{2}\right)}^{=-\sin\left(0 - \frac{x}{2}\right)}.$$
   *On déduit alors de la question précédente que :*
$$\begin{aligned} S_n(x) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) + \left[\sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)\right] + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

   (c) En déduire que, pour tout $x$ dans un ensemble $D$ <u>à déterminer</u> :
$$\boxed{S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

   *Dans le cas où* $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$*, i.e. lorsque* $\frac{x}{2} \not\equiv 0\ [\pi]$*, ou encore* $x \not\equiv 0\ [2\pi]$*,*
   *on a, grâce à la formule :* $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$ *:*
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{(nx + \frac{x}{2}) - \frac{x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{(nx + \frac{x}{2}) + \frac{x}{2}}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$
   *Cette relation est valide pour tout* $x$ *de* $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0\ [2\pi]\}$.

   (d) Donner l'expression de $S_n(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus D$.
   *Dans le cas où* $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$*, i.e. lorsque* $x \equiv 0\ [2\pi]$*, on a*
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \cos(0) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(kx)$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_n(x) = S_n(x+\pi)$.

*Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :*

$$S_n(x+\pi) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k(x+\pi)) = \sum_{k=0}^{n} \left[ \cos(kx) \overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} - \sin(kx) \overbrace{\sin(k\pi))}^{=0} \right] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(kx) = A_n(x).$$

(b) A l'aide des résultats précédents, montrer que, pour tout $x$ dans un ensemble $E$ à déterminer :

$$\boxed{A_n(x) = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

*A l'aide des résultats des questions 1. (c), (d) et de la formule :*
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$, *on obtient :*

- *Cas* $x + \pi \not\equiv 0\ [2\pi]$, *i.e.* $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$ *:*

$$\begin{aligned}
A_n(x) = S_n(x+\pi) &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)(x+\pi)}{2}\right)\cos\left(\frac{n(x+\pi)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x + (n+\frac{1}{2})\pi\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{\left[\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) \overbrace{\cos\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)}^{=0} + \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right) \overbrace{\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)}^{=(-1)^n}\right] + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{(-1)^n \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

- *L'ensemble $E$ sur lequel cette relation est vérifiée est* $\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \pi\ [2\pi]\}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad I_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \cos(kx)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(a) A l'aide des questions 1. et 2., calculer les sommes : $P_n(x) + I_n(x)$ et $P_n(x) - I_n(x)$.

*On a, par définition de $P_n$ et $I_n$ :*

- $P_n(x) + I_n(x) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \cos(kx) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = S_n(x).$
- $P_n(x) - I_n(x) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \cos(kx) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(kx) = A_n(x).$

(b) En déduire la valeur de $P_n(x)$ et $I_n(x)$.

*En ajoutant les deux égalités obtenues précédemment, on trouve que :* $2P_n(x) = S_n(x) + A_n(x)$ *d'où*

$$\boxed{P_n(x) = \frac{S_n(x) + A_n(x)}{2}}.$$

*En faisant la différence des deux égalités obtenues précédemment, on trouve que :* $2I_n(x) = S_n(x) - A_n(x)$ *d'où*

$$\boxed{I_n(x) = \frac{S_n(x) - A_n(x)}{2}}.$$

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆