Devoir libre n°2, correction

Exercice n°1 Résolution d'une équation fonctionnelle par analyse-synthèse

On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les contraintes :

$$(C): \quad f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour résoudre ce problème on raisonne par **analyse-synthèse**.

1. **Analyse :** On **suppose** l'existence d'une fonction f vérifiant (C).
   (a) Montrer que f est deux fois dérivable (i.e. que f' est dérivable) et donner une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants nécessairement vérifiée par f.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée est donnée, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f'(x) \overset{(\star)}{=} f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ $\left(\text{où } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est une constante réelle}\right)$, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit, par dérivation de la relation $(\star)$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f'(x)$.
   La fonction f est solution de l'EDL d'ordre deux à coefficients constants homogène (E_H) : $y'' - y' = 0$.

   (b) En déduire qu'il existe des réels λ et μ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = \lambda + \mu e^x$.

   Résolvons (E_H). L'équation caractéristique associée est $r^2 - r = 0$; ses racines sont 0 et 1. La solution générale de cette équation est donc

   $$\boxed{x \mapsto \lambda + \mu e^x \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

   Comme f est solution de cette équation, son expression est du type ci-dessus.

   A ce stade, on a montré que, si une fonction vérifie (C) alors elle est **obligatoirement** dans l'ensemble

   $$\{x \longmapsto \lambda + \mu e^x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. **Synthèse :** Soient λ et μ deux réels et $f : x \mapsto \lambda + \mu e^x$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et μ pour que f vérifie (C).

   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \mapsto \lambda + \mu e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (C) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mu e^x = \lambda + \mu e^x + \int_0^1 (\lambda + \mu e^t)\,\mathrm{d}t \\
&\iff 0 = \lambda + [\lambda t + \mu e^t]_0^1 \\
&\iff 0 = \lambda + [\lambda + \mu e - \mu] \\
&\iff \lambda = \frac{1-e}{2}\mu.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une CNS pour que } f \text{ soit effectivement solution est donnée par la relation } \lambda = \frac{1-e}{2}\mu}.$$

3. **Conclusion :** Ecrire l'ensemble des fonctions vérifiant (C).

   L'ensemble des solutions du problème (C) est donné par :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \mu\left(\frac{1-e}{2}+e^x\right) \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}}.$$

Exercice n°2 Résolution d'une EDL d'ordre deux à coefficients variables avec second membre

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'EDL d'ordre deux à coefficients variables suivante :

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad x^2 y''(x) - \frac{3}{4}y(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

1. Résoudre $(E_1) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - z(t) = 4e^{-t}$.

   L'équation (E_1) est une EDL d'ordre deux à coefficients constants avec second membre.
   L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ et a pour racines 1 et -1.
   La solution générale de l'équation homogène $z'' - z = 0$ associée à (E_1) est :

$$\boxed{t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} \quad \textit{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}.$$

   Etant donné que -1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière à (E_1) sous la forme $f_P : t \mapsto Cte^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_P'(t) = Ce^{-t}(1-t)$ et $f_P''(t) = Ce^{-t}(t-2)$, d'où

$$\begin{aligned} f_P \textit{ solution de } (E_1) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ f_P''(t) - f_P(t) = 4e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ Ce^{-t}(t-2) - Cte^{-t} = 4e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ -2Ce^{-t} = 4e^{-t} \\ &\iff C = -2. \end{aligned}$$

   Une solution particulière de (E_1) est donc donnée par $\boxed{f_P : t \mapsto -2te^{-t}}$.
   La solution générale de (E_1) est

$$\boxed{t \mapsto -2te^{-t} + \lambda e^t + \mu e^{-t} \quad \textit{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}.$$

2. Soit y une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad z(t) = e^{-\frac{t}{2}}y(e^t)$.

   (a) Justifier que z est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ <u>de manière consciencieuse</u>.

   La fonction y est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et la fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$, ainsi $t \mapsto y(e^t)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et, par suite, z est bien définie sur $\mathbb{R}$. Par composition, $t \mapsto y(e^t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par produit, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et de ses dérivées.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}y(e^t) + e^{-\frac{t}{2}}(e^t y'(e^t)) \\ &= e^{\frac{t}{2}}y'(e^t) - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}y(e^t). \\ z''(t) &= \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}y'(e^t) + e^{\frac{t}{2}}(e^t y''(e^t)) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}y(e^t) + e^{-\frac{t}{2}}(e^t y'(e^t))\right) \\ &= e^{\frac{3t}{2}}y''(e^t) + \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}y(e^t) \end{aligned}$$

(c) En déduire que z est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.

On a :

$$\begin{aligned}
z \textit{ solution de } (E_1) \textit{ sur } \mathbb{R} &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - z(t) = 4e^{-t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{\frac{3t}{2}} y''(e^t) + \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{2}} y(e^t) - \left(e^{-\frac{t}{2}} y(e^t)\right) = 4e^{-t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{\frac{3t}{2}} y''(e^t) - \frac{3}{4} e^{-\frac{t}{2}} y(e^t) = 4e^{-t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t} y''(e^t) - \frac{3}{4} y(e^t) = 4e^{-\frac{t}{2}} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \left(e^t\right)^2 y''(e^t) - \frac{3}{4} y(e^t) = \frac{4}{\sqrt{e^t}} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ x^2 y''(x) - \frac{3}{4} y(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \textit{[car } \exp \textit{ est bijective de } \mathbb{R} \textit{ sur } \mathbb{R}_+^\star\textit{]} \\
&\iff y \textit{ solution de } (E) \textit{ sur } \mathbb{R}_+^\star
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{z \textit{ solution de } (E_1) \textit{ sur } \mathbb{R} \quad \textit{si et seulement si} \quad y \textit{ solution de } (E) \textit{ sur } \mathbb{R}_+^\star}$.

3. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $y(x)$ à l'aide de la fonction z, puis résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, *on a* $y(x) = y\left(e^{\ln x}\right) = e^{\frac{\ln x}{2}} z(\ln x) = \sqrt{x} z(\ln x)$.
Par la question précédente, y *est solution sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *si et seulement si,* y *s'écrit :*

$$y(x) = \sqrt{x} z(\ln x) = \sqrt{x}\left(-2(\ln x)e^{-\ln x} + \lambda e^{\ln x} + \mu e^{-\ln x}\right) = \lambda x\sqrt{x} + \frac{\mu}{\sqrt{x}} - \frac{2\ln x}{\sqrt{x}} \quad \textit{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de (E) *sont les fonctions :*

$$\boxed{x \mapsto \lambda x\sqrt{x} + \frac{\mu}{\sqrt{x}} - \frac{2\ln x}{\sqrt{x}} \quad \textit{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}.$$

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆