Correction du devoir libre n°3

Exercice n°1 (Méthode de Héron pour l'approximation de $\sqrt{2}$)

On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. **Convergence de la suite** (u_n)

   (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle est minorée par $\sqrt{2}$.

   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ *définie et dérivable par opérations sur* $]0; +\infty[$. *De plus, pour tout* $x \in]0; +\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{x^2-2}{2x^2}$ *et le signe de* $f'(x)$ *est le signe de* $x^2 - 2$ *sur* $]0; +\infty[$.
   On en déduit le tableau de variation suivant (les limites aux bornes ne sont pas des formes indéterminées) :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   On déduit que $f([\sqrt{2}; +\infty[) \subset [\sqrt{2}; +\infty[$ *et l'intervalle* $[\sqrt{2}; +\infty[$ *est stable par* f.
   Comme $u_0 \in [\sqrt{2}; +\infty[$, *la suite* (u_n) *est bien définie et on a par récurrence immédiate :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\sqrt{2}; +\infty[$, *donc la suite* (u_n) *est minorée par* $\sqrt{2}$.

   (b) Prouver par récurrence que (u_n) est strictement décroissante.

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, *la proposition* $\mathscr{P}(n)$: « $u_{n+1} < u_n$ ».

   - $\mathscr{P}(0)$ *est vraie car* $u_0 - u_1 = u_0 - f(u_0) = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$.
   - *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que la proposition* $\mathscr{P}(n)$ *et montrons* $\mathscr{P}(n+1)$.
     Par hypothèse de récurrence, $u_n > u_{n+1}$. *Or, par la question précédente,* f *est strictement croissante sur* $[\sqrt{2}; +\infty[$ *et* $u_n,\ u_{n+1} \in [\sqrt{2}; +\infty[$, *donc* $f(u_n) > f(u_{n+1})$ *i.e.* $u_{n+1} > u_{n+2}$. *Ainsi* $\mathscr{P}(n+1)$ *est vraie.*
   - *Par le principe de récurrence, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ *est vraie.*

   (c) En déduire que (u_n) est convergente. Justifier soigneusement que sa limite est $\sqrt{2}$.

   Des questions précédentes, la suite (u_n) *est minorée et strictement décroissante, le théorème de la limite monotone nous assure que* (u_n) *converge vers une limite* $\ell \in [\sqrt{2}; +\infty[$. *La fonction* f *étant continue sur* $[\sqrt{2}; +\infty[$, *elle l'est en particulier en* ℓ, *ainsi* $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. *En passant à la limite lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *dans relation :*
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, *on obtient que* $f(\ell) = \ell$. *Donc* ℓ *est un point fixe de* f. *De plus, comme*

   $$f(\ell) = \ell \iff \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) = \ell \iff \frac{2-\ell^2}{2\ell} = 0 \iff \ell \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

   La seule valeur possible pour ℓ *est* $\sqrt{2}$.

2. **Vitesse de convergence de la suite** (u_n) **vers** $\sqrt{2}$

   On propose ici une autre approche permettant de montrer que (u_n) *converge vers* $\sqrt{2}$.
   Cette nouvelle approche nous permettra également d'estimer la vitesse à laquelle cette convergence s'effectue.

   (a) A l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, calculer les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et donner pour chacun le nombre de décimales exactes communes avec $\sqrt{2}$.
   Comment ce nombre de décimales évolue à chaque itération?

   On a $\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,80\ldots$

- $u_0 = 2$, *il y a zéro décimale commune exacte avec* $\sqrt{2}$.
- $u_1 = 1,5$, *il y a une décimale commune exacte avec* $\sqrt{2}$.
- $u_2 \approx 1,41\,6\ldots$, *il y a trois décimales communes exactes avec* $\sqrt{2}$.
- $u_3 \approx 1,414\,21\,5\ldots$, *il y a six décimales communes exactes avec* $\sqrt{2}$.
- $u_4 \approx 1,414\,213\,562\,37\,4\ldots$, *il y a douze décimales communes exactes avec* $\sqrt{2}$.

Le nombre de décimales semble doubler à chaque itération.

Ce phénomène est typique d'une convergence à vitesse $\boxed{\text{hypergéométrique}}$ *(voir ci-dessous).*
Dans la suite, on estime l'erreur $|u_n - \sqrt{2}|$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2u_n} \times (u_n - \sqrt{2})^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \dfrac{u_n^2 - \sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} = \dfrac{1}{2u_n} \times (u_n - \sqrt{2})^2$.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant (2\sqrt{2})\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^n}$, puis que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, *la proposition* $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant (2\sqrt{2})\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^n}$ ».

- $\mathscr{P}(0)$ *est vraie car* $|u_0 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$ *et* $(2\sqrt{2})\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^0} = (2\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{2}-1}{2} = 2 - \sqrt{2}$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que la proposition* $\mathscr{P}(n)$ *et montrons* $\mathscr{P}(n+1)$.

  Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} - \sqrt{2}| &= \frac{1}{2|u_n|}|u_n - \sqrt{2}|^2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \sqrt{2}|^2 \quad \textit{[Car } u_n \geqslant \sqrt{2} \textit{ par la question 1.]} \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|(2\sqrt{2})\left|\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^n}\right|^2 \quad \textit{[Par hypothèse de récurrence]} \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^2\left|\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2\times 2^n} \\
&\leqslant 2\sqrt{2}\left|\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ *est vraie.*

- *Par le principe de récurrence, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ *est vraie. Comme* $0 < \left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right| < 1$, $2\sqrt{2}\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *le théorème d'encadrement nous assure que* $(|u_n - \sqrt{2}|)$ *converge vers* 0 *et donc* (u_n) *converge vers* $\sqrt{2}$.

<u>Définition :</u> *On dit que la convergence de* (u_n) *vers un réel* ℓ *est à vitesse* $\boxed{\text{hypergéométrique}}$ *lorsque, à partir d'un certain rang* $N \in \mathbb{N}$, *on a :* $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant Ck^{2^n}$ *avec* $0 < k < 1$ *et* C *une constante positive (dans notre cas* $C = 2\sqrt{2}$, $k = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ *et* $\ell = \sqrt{2}$*).*

(d) Soit $0 < \varepsilon$ fixé. Résoudre l'inéquation $\quad (2\sqrt{2})\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^{2^x} \leqslant \varepsilon \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. *En posant* $k = \left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|$, *on a*

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{2})k^{2^x} \leqslant \varepsilon &\iff 2^x \ln(k) \leqslant \ln\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right) \\
&\iff 2^x \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)}{\ln(k)} \quad \textit{car } 0 < k < 1 \textit{ et donc } \ln(k) < 0
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ *dans le cas où* $2\sqrt{2} \leqslant \varepsilon$,
en effet dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\dfrac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)}{\ln(k)} \leqslant 0 < 2^x$.
Dans le cas où $0 < \varepsilon < 2\sqrt{2}$, *on a* $\dfrac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)}{\ln(k)} > 0$ *et donc :*

$$2^x \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)}{\ln(k)} \iff x \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)}{\ln(k)}\right)}{\ln 2} = \alpha(\varepsilon).$$

Donc l'ensemble des solutions est $[\alpha(\varepsilon); +\infty[\cap \mathbb{R}_+^\star$.

(e) Combien de termes de la suite suffit-il de calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

Comme $0 < 10^{-100} < 2\sqrt{2}$, *on a* $\alpha(10^{-100}) \approx 7,2$. *Il suffit calculer* 8 *termes de la suite pour obtenir une approximation de* $\sqrt{2}$ *à* 10^{-100} *près.*

Exercice facultatif (Une autre approximation de $\sqrt{2}$ par les fractions continues)

1. Montrer que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

   On a $\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})+1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

On peut alors écrire : $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$ $\quad \sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$ $\quad \sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}$

Ce procédé itératif suggère l'écriture « infinie » $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2+\dots}}}}}$

Pour formaliser cette écriture, on va poser $\begin{cases} f : &]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 + \dfrac{1}{1+x} \end{cases}$

et introduire la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

2. **Convergence de la suite** (u_n)

   (a) Justifier que (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

   La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$.
   De plus, $f([1\,;2] \subset \left[\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{3}{2}\right] \subset [1\,;2]$ *: l'intervalle $[1\,;2]$ est stable par f, et comme $u_0 = 1 \in [1\,;2]$, alors, la suite (u_n) et bien définie et, par récurrence immédiate, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.*

   (b) Exprimer, à l'aide de f, u_{2n+2} en fonction de u_{2n}.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n})$. Donc $\boxed{u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})}$.

   (c) En déduire, par récurrence, que la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $\sqrt{2} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n}$ ».

   - *$\mathscr{P}(0)$ vraie car $u_2 = f(f(u_0)) = f(f(2)) = f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{10}{7} \leqslant u_0$, et $\sqrt{2} \leqslant \dfrac{10}{7}$.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.*

     On a $\sqrt{2} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n}$. Or, f étant décroissante sur $[1\,;2]$ à valeurs dans $[1\,;2]$, la fonction $f \circ f$ est croissante sur cet intervalle, donc, comme $\sqrt{2}$, u_{2n}, $u_{2n+2} \in [1\,;2]$ (question 2.(a)), on a :
     $(f \circ f)(\sqrt{2}) \leqslant (f \circ f)(u_{2n+2}) \leqslant (f \circ f)(u_{2n})$, i.e. $\sqrt{2} \leqslant u_{2n+4} \leqslant u_{2n+2}$ car d'après la question 1.
     $f(f(\sqrt{2})) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Par le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (u_{2n}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.*

   (d) Justifier soigneusement que (u_{2n}) converge vers $\sqrt{2}$.

   Comme la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée, le théorème de la limite monotone nous assure que (u_{2n}) converge vers une limite ℓ. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leqslant u_{2n} \leqslant 2$, on a nécessairement $\sqrt{2} \leqslant \ell \leqslant 2$. Ainsi

   - *$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc $u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$*
   - *$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\underline{f \circ f \text{ est continue en } \ell}$, donc $(f \circ f)(u_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (f \circ f)(\ell)$.*

   Par unicité de la limite $(f \circ f)(\ell) = \ell$ et ℓ est un point fixe de $f \circ f$ appartenant à $[\sqrt{2}\,;2]$. Or, pour tout $x \in]-1;+\infty[$

   $$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+x}} = x \iff \frac{3x+4}{2x+3} = x \iff 2x^2 = 4 \iff x = \sqrt{2} \quad (\textit{car } -\sqrt{2} < -1).$$

   Donc $\ell = \sqrt{2}$ et (u_{2n}) converge vers $\sqrt{2}$.

(e) En déduire que (u_{2n+1}) converge vers $\sqrt{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$. Comme $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$ et que f est continue en $\sqrt{2}$, on a $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. La suite (u_{2n+1}) converge vers $\sqrt{2}$.

(f) Conclure quant à la convergence de (u_n).

Les suites des indices pairs (u_{2n}) et impairs (u_{2n+1}) de (u_n) possèdent une limite finie commune qui est $\sqrt{2}$. On en déduit que ma suite (u_n) converge également vers $\sqrt{2}$.

3. **Vitesse de convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{2}$**

Comme dans l'exercice précédent, on propose ici une autre approche permettant de montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$. Cette nouvelle approche nous permettra également d'estimer la vitesse à laquelle cette convergence s'effectue.

(a) A l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, calculer les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 et donner pour chacun le nombre de décimales exactes communes avec $\sqrt{2}$.
Comment ce nombre de décimales évolue à chaque itération ?

On a $\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,80\ldots$

- $u_0 = 2$, *il y a zéro décimale commune exacte avec $\sqrt{2}$.*
- $u_1 \approx 1,3\ldots$, *il y a une décimale commune exacte avec $\sqrt{2}$.*
- $u_2 \approx 1,4\,2\ldots$, *il y a deux décimales communes exactes avec $\sqrt{2}$.*
- $u_3 \approx 1,41\,1\ldots$, *il y a trois décimales communes exactes avec $\sqrt{2}$.*
- $u_4 \approx 1,414\,6\ldots$, *il y a quatre décimales communes exactes avec $\sqrt{2}$.*
- $u_5 \approx 1,414\;1\ldots$, *il y a quatre décimales communes exactes avec $\sqrt{2}$.*
- $u_6 \approx 1,414\;2\;2\ldots$, *il y a cinq décimales communes exactes avec $\sqrt{2}$.*
- $u_7 \approx 1,414\;21\;1\ldots$, *il y a six décimales communes exactes avec $\sqrt{2}$.*

Le nombre de décimales semble augmenter de un à chaque itération.

Ce phénomène est typique d'une convergence à vitesse $\boxed{\textit{géométrique}}$ *(voir ci-dessous).*
Dans la suite, estime l'erreur $|u_n - \sqrt{2}|$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n} \times (u_n - \sqrt{2})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+u_n} - \sqrt{2} &= \frac{2+u_n}{1+u_n} - \sqrt{2} \\ &= \frac{2+u_n-\sqrt{2}-u_n\sqrt{2}}{1+u_n} \\ &= \frac{(u_n-\sqrt{2})-\sqrt{2}(u_n-\sqrt{2})}{1+u_n} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{1+u_n} \times (u_n-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant (2-\sqrt{2})\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^n$, puis que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n$, on a

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+1}\right| . \left(u_n - \sqrt{2}\right).$$

On repère une majoration géométrique : par récurrence immédiate, on obtient :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right|^n . \left(2-\sqrt{2}\right) \quad \textit{car } u_0 = 2.$$

Comme $0 < \left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right| < 1$, on a $\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le théorème d'encadrement nous assure que $(|u_n - \sqrt{2}|)$ converge vers 0 et donc que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Définition : *On dit que la convergence de* (u_n) *vers une réel* ℓ *est à vitesse* $\boxed{\text{géométrique}}$ *lorsque, à partir d'un certain rang* $N \in \mathbb{N}$*, on a :* $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant Ck^n$ *avec* $0 < k < 1$ *et* C *une constante positive (qui sont* C*,* k *et* ℓ *dans notre cas ?).*

(d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Résoudre l'inéquation $|1-\sqrt{2}|\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right|^x \leqslant \varepsilon$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$*. En posant* $k = \left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right|$*, on a*

$$\begin{aligned}(2\sqrt{2})k^x \leqslant \varepsilon &\iff x\ln(k) \leqslant \ln\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)\\ &\iff x \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)}{\ln(k)} = \beta(\varepsilon) \quad \textit{car } 0 < k < 1 \textit{ et donc } \ln(k) < 0.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $[\beta(\varepsilon); +\infty[\ \cap\ \mathbb{R}_+^\star$.

(e) Combien de termes de la suite suffit-il de calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ? Comparer avec les résultats obtenus à l'exercice précédent et conclure.

Comme $\beta(10^{-100}) \approx 146,9$*. Il suffit calculer* 147 *termes de la suite pour obtenir une approximation de* $\sqrt{2}$ *à* 10^{-100} *près.*

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆