# Correction du Devoir libre n°4

L'objectif de ce devoir est de démontrer la limite annoncée lors du TD sur les suites :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

On considère les suites d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Remarque : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions $x\mapsto\cos^{2n}(x)$ et $x\mapsto x^2\cos^{2n}(x)$ sont continues sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ; ainsi les intégrales $I_n$ et $J_n$ sont bien définies.*

1. Calculer $J_0$ et justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant J_n$.

   *On a $J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$. Donc $\boxed{J_0=\frac{\pi^3}{24}}$.*

   *Soit $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $0\leqslant x^2(\cos^n(x))^2$. Par positivité de l'intégrale on obtient $0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x=J_n$.*

   *Donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant J_n}$.*

2. A l'aide d'un changement de variable affine que vous préciserez (voir formulaire de trigonométrie !), montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

   *Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose le changement de variable affine $x=\frac{\pi}{2}-t$, ainsi $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$ et on a le changement de bornes suivant : $\begin{cases} t=\frac{\pi}{2} & \mapsto\quad x=0\\ t=0 & \mapsto\quad x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$. La fonction $t\mapsto\frac{\pi}{2}-t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur lequel la fonction $x\mapsto\cos^{2n}(x)$ est continue. On a alors :*

   $$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

   *D'où : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x}$.*

*On a montré en cours que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad I_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$. On admet donc ce résultat dans la suite.*

3. Montrer à l'aide de <u>deux IPP successives</u> que, pour tout $k\in\mathbb{N}^{\geqslant1}$, on a :

   $$I_k=-2k^2J_k+k(2k-1)J_{k-1}.$$

   *Soit $k\in\mathbb{N}^{\geqslant1}$. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\cos^{2k}(x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a par IPP :*

   $$\begin{aligned}I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\times\cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x&=\overbrace{\left[x\cos^{2k}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=0}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left[(2k)(-\sin(x))\cos^{2k-1}(x)\right]\mathrm{d}x\\&=2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left[\sin(x)\cos^{2k-1}(x)\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

*Les fonctions* $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ *et* $x \mapsto \sin(x)\cos^{2k-1}(x)$ *étant de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$*, on a par une seconde IPP :*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left[\sin(x)\cos^{2k-1}(x)\right] \mathrm{d}x &= \overbrace{\left[\frac{x^2}{2}\left[\sin(x)\cos^{2k-1}(x)\right]\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2}\left[\cos(x)\cos^{2k-1}(x) - (2k-1)\sin^2(x)\cos^{2k-2}(x)\right] \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x - (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left[(1-\cos^2(x))\cos^{2k-2}(x)\right] \mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x - (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2k-2}(x)\,\mathrm{d}x + (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[J_k - (2k-1)J_{k-1} + (2k-1)J_k\right] \\
&= \frac{1}{2}(2k-1)J_{k-1} - kJ_k.
\end{aligned}$$

*En fin de compte :* $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1},\ I_k = 2k\left[\frac{1}{2}(2k-1)J_{k-1} - kJ_k\right] = -2k^2J_k + k(2k-1)J_{k-1}}$.

4. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\quad \dfrac{\pi}{4k^2} = \dfrac{4^{k-1}((k-1)!)^2}{(2k-2)!}J_{k-1} - \dfrac{4^k(k!)^2}{(2k)!}J_k$.

   *Soit* $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$*. On a par la question précédente :* $I_k = -2k^2J_k + k(2k-1)J_{k-1}$*. Or* $I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$*, donc :*

$$\frac{(2k)(2k-1)!}{4^k(k!)(k!)}\frac{\pi}{2} = -2k^2J_k + k(2k-1)J_{k-1}$$

   *c'est-à-dire :* $\dfrac{k(2k-1)!}{4^{k-1}((k-1)!)((k-1)!)}\dfrac{\pi}{4k^2} = -2k^2J_k + k(2k-1)J_{k-1}$ *ou encore*

$$\frac{\pi}{4k^2} = -2k^2J_k\frac{4^{k-1}((k-1)!)^2}{k(2k-1)!} + k(2k-1)J_{k-1}\frac{4^{k-1}((k-1)!)^2}{k(2k-1)!}$$

   *et donc*

$$\boxed{\frac{\pi}{4k^2} = \frac{4^{k-1}((k-1)!)^2}{(2k-2)!}J_{k-1} - \frac{4^k(k!)^2}{(2k)!}J_k}.$$

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n$.

   *Soit* $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$*. Pour tout* $k \in [\![1;n]\!]$*, on a par la question précédente* $\dfrac{\pi}{4k^2} = \dfrac{4^{k-1}((k-1)!)^2}{(2k-2)!}J_{k-1} - \dfrac{4^k(k!)^2}{(2k)!}J_k$*. En sommant sur les indices* $k \in [\![1;n]\!]$*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4^{k-1}((k-1)!)^2}{(2k-2)!}J_{k-1} - \frac{4^k(k!)^2}{(2k)!}J_k\right) \quad \textit{[On reconnaît une somme télescopique]} \\
&= J_0 - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n \\
&= \frac{\pi^3}{24} - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n
\end{aligned}$$

   *Donc, on obtient la relation* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n}$.

6. *On montre dans cette question que la suite* $\left(\dfrac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\right)_{n\geqslant 1}$ *converge vers zéro.*

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x)$.

   *On étudie la fonction* $f : x \mapsto \sin(x) - \dfrac{2}{\pi}x$ *définie sur* $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$*.*
   *La fonction* $f$ *est deux fois dérivable sur* $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ *et on a, pour tout* $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$*,* $f'(x) = \cos(x) - \dfrac{2}{\pi}$ *et* $f''(x) = -\sin(x)$*.*
   *Comme, pour tout* $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$*,* $f''(x) \leqslant 0$ *(avec* $f''(x) = 0 \iff x = 0$*), la fonction* $f'$ *est strictement décroissante*

*sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *avec* $f'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0$ *et* $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}<0$. *La fonction* $f'$ *étant continue strictement décroissante sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *à valeurs dans* $\left[-\frac{2}{\pi};1-\frac{2}{\pi}\right]$, *elle est bijective et il existe un unique* $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $f'(\alpha)=0$. *De plus, pour tout* $x\in\left[-\frac{2}{\pi};\alpha\right[$, $f'(x)>0$ *et pour tout* $x\in\left]\alpha;1-\frac{2}{\pi}\right]$, $f'(x)<0$.

*Donc* $f$ *est strictement croissante sur* $[0;\alpha]$ *et strictement décroissante sur* $\left[\alpha;\frac{\pi}{2}\right]$, *et comme* $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, *le minimum de* $f$ *est* $0$.

*Autrement dit :* $\boxed{\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ 0\leqslant\sin(x)-\frac{2}{\pi}x}$.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}$. En déduire que : $J_n\leqslant\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$, puis que $J_n\leqslant\frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.

*A l'aide de l'inégalité précédemment montrée, on a,*
*pour tout* $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $x^2\cos^{2n}(x)\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\sin(x)\right)^2\cos^{2n}(x)\leqslant\frac{\pi^2}{2}\sin^2(x)\cos^{2n}(x)$.
*Par croissance de l'intégrale, on obtient :*

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

*De plus*

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2(x))\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)-\cos^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi^2}{4}(I_n-I_{n+1})\\&=\frac{\pi^2}{4}\left(I_n-\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}I_n\right)\\&=\frac{\pi^2}{4}\left(1-\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)I_n\\&=\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2(n+1)}I_n\\&=\frac{\pi^2}{8(n+1)}I_n.\end{aligned}$$

*Donc :* $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1},\ J_n\leqslant\frac{\pi^2}{8(n+1)}I_n}$.

(c) Montrer que $\left(\frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers zéro.

*Soit* $n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}$. *L'inégalité montrée à la question précédente se réécrit :* $J_n\leqslant\frac{\pi^2}{8(n+1)}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ *ou encore* $J_n\leqslant\frac{\pi^2}{2(n+1)}\frac{\pi(2n)!}{4^{n+1}(n!)^2}\frac{1}{2}$ *et on en déduit que* $\frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\leqslant\frac{\pi^2}{4(n+1)}$.

*On a montré à la question 1. que* $0\leqslant J_n$, *ainsi, pour tout* $n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}$, *on a* $0\leqslant\frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\leqslant\frac{\pi^2}{4(n+1)}$. *Or,* $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{4(n+1)}=0$, *donc, le théorème d'encadrement nous assure que la suite* $\left(\frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\right)_{n\geqslant 1}$ *converge et que, de plus, sa limite est* $0$.

7. Conclure.

*Comme la suite* $\left(\frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\right)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* $0$, *la question 5. nous assure que*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{4^{n+1}(n!)^2}{\pi(2n)!}J_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi^2}{6}.$$

*Conclusion :* $\boxed{\text{La suite }\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}\text{ converge vers }\frac{\pi^2}{6}}$.