Correction du devoir libre n°5

Dans tout ce problème, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Partie A : Etude de la fonction f

1. Etudier la continuité de f (*en* 0*, on étudiera la continuité à gauche et à droite*).

   Par les théorèmes usuels, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$. Etudions la continuité en 0 :

   - *Par produit de limites,* $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = f(0)$*. Donc* $\boxed{f \text{ est continue à droite de } 0}$.
   - *On a* $-\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $-\dfrac{e^X}{X} \underset{X\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *par croissances comparées. Ainsi, par composition des limites,* $xe^{-\frac{1}{x}} = -\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{-1/x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$*. Donc* $\boxed{f \text{ n'est pas continue à gauche de } 0}$.

   En conclusion, $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } 0}$.

2. Etudier la dérivabilité de f (*en* 0*, on étudiera la dérivabilité à gauche et à droite*).

   Par les théorèmes usuels, f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
   Etant donné que f est discontinue en 0 alors f n'est pas dérivable en 0. Etudions la dérivabilité à gauche et à droite en 0 :

   - *Comme f n'est pas continue à gauche de 0,* $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à gauche en } 0}$.
   - *De plus, on a :* $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$*. Donc* $\boxed{f \text{ est dérivable à droite de } 0 \text{ et } f'_d(0) = 0}$.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

   Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ qui est du signe de $\dfrac{x+1}{x}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ || 0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Déterminer, en justifiant soigneusement, l'ensemble des réels k pour lesquels l'équation $f(x) = k$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.

   L'ensemble image de f est $]-\infty\,;-e] \cup \mathbb{R}_+$.
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ et strictement monotone sur $]-\infty\,;-1]$, $[-1;0[$ puis $[0;+\infty[$.
   On peut donc lui appliquer le théorème de la bijection sur chacun de ces trois intervalles :

   - *Pour $k \in]-\infty\,;-e]$, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.*
   - *Par contre, pour $k = -e$, $f(x) = k$ admet une unique solution.*
   - *Comme $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ est disjoint de $]-\infty;-e]$, on conclut que :*

   $\boxed{\text{L'ensemble des réels } k \text{ pour lesquels l'équation } f(x) = k \text{ admet une unique solution est } \{-e\} \cup \mathbb{R}_+}$.

5. Prouver que f admet un unique point fixe et le déterminer.

   Résolvons l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x$. *On a, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \iff x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) = 0 \iff x = 0 \quad \textit{ou} \quad e^{-\frac{1}{x}} = 1 \iff x = 0 \quad \textit{ou} \quad \frac{1}{x} = 0 \iff x = 0.$$

   $\boxed{\textit{La fonction } f \textit{ admet un unique point fixe en } x = 0}$.

On note $\mathscr{C}_f$ *la courbe représentative de* f *dans un repère* $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition :

On dit que $\mathscr{C}_f$ *admet pour asymptote oblique la droite d'équation* $y = ax + b$ *(*$a, b \in \mathbb{R}$*) au voisinage de* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) lorsque :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \qquad \big(\textit{resp.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0\big).$$

6. Justifier que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Etudions les limites de $f(x) - (x - 1)$ *en* $+\infty$ *et* $-\infty$.

   - *Pour* $x > 0$, $f(x) - (x - 1) = x(e^{-1/x} - 1) + 1 = -\dfrac{e^{-1/x} - 1}{-1/x} + 1$.

     Or $-\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *et on a la limite du taux d'accroissement suivant :* $\dfrac{e^X - 1}{X} \underset{X \to 0}{\longrightarrow} 1$.

     Donc, par composition des limites, $-\dfrac{e^{-1/x} - 1}{-1/x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1$ *et donc* $f(x) - (x - 1) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

     $\boxed{\textit{La droite d'équation } y = x - 1 \textit{ est asymptote oblique à } \mathscr{C}_f \textit{ en } +\infty}$.

   - *Par un raisonnement identique (il suffit de remplacer tous les* $+\infty$ *par* $-\infty$*), on trouve que :*

     $\boxed{\textit{La droite d'équation } y = x - 1 \textit{ est asymptote oblique à } \mathscr{C}_f \textit{ en } -\infty}$.

7. A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer l'inégalité : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 \leqslant e^x$
   (*on traitera trois cas :* $x > 0$, $x = 0$ *et* $x < 0$).
   En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

   - *Soit* $t > 0$. *La fonction* $\exp$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0; t]$, *on peut lui appliquer l'inégalité des accroissements finis :* $\quad \inf\limits_{u \in]0;t[} (\exp'(u))(t - 0) \leqslant \exp(t) - \exp(0)$ *avec* $\inf\limits_{u \in]0;t[} (\exp'(u)) = \exp(0) = 1$.

     D'où $1 \times t \leqslant e^t - 1$, *i.e.* $\boxed{t + 1 \leqslant e^t}$.

   - *Soit* $t < 0$. *La fonction* $\exp$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[t; 0]$, *on peut lui appliquer l'inégalité des accroissements finis :* $\quad \exp(0) - \exp(t) \leqslant \sup\limits_{u \in]t;0[} (\exp'(u))(0 - t)$ *avec* $\sup\limits_{u \in]t;0[} (\exp'(u)) = \exp(0) = 1$.

     D'où $1 - e^t \leqslant 1 \times (-t)$, *i.e.* $\boxed{t + 1 \leqslant e^t}$.

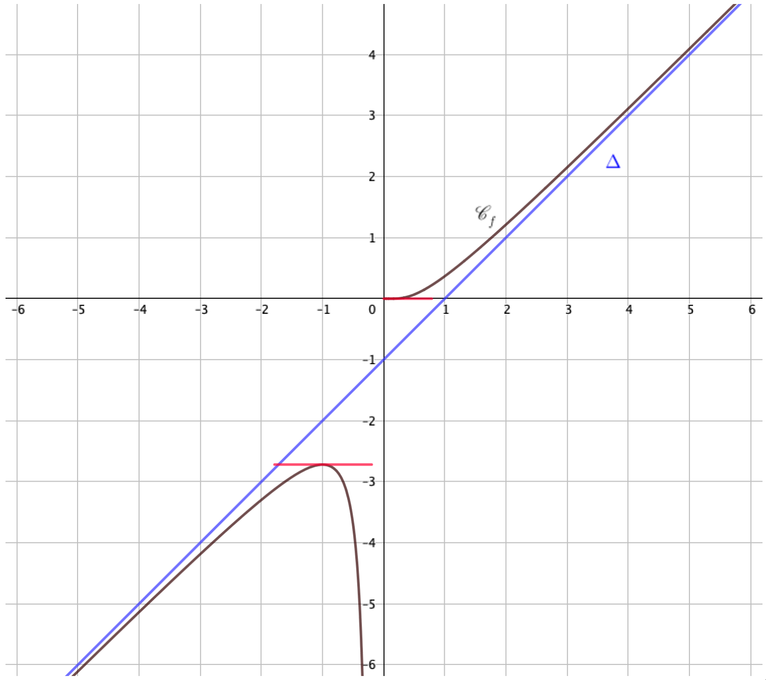
   - *Enfin, pour* $t = 0$, *l'inégalité à démontrer est clair :* $e^0 = 1 \geqslant 1 = 0 + 1$.

   En conclusion, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t \geqslant t + 1$.

   On en déduit que, pour tout $x \neq 0$, $e^{-1/x} \geqslant -\dfrac{1}{x} + 1$. *En multipliant par* x, *on obtient :*

   - $\boxed{\textit{Si } x > 0 \textit{ alors } f(x) \geqslant -1 + x \textit{ et la courbe } \mathscr{C}_f \textit{ est au-dessus de } \Delta}$.
   - $\boxed{\textit{Si } x < 0 \textit{ alors } f(x) \leqslant -1 + x \textit{ et la courbe } \mathscr{C}_f \textit{ est en-dessous de } \Delta}$.

8. A l'aide des résultats obtenus, tracer avec soin la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ainsi que la droite Δ et des tangentes à $\mathscr{C}_f$ (*Choisir des unités adaptées que l'on précisera*).



;

Partie B : Equation différentielle et raccordement

On considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E): \quad x^2 y'(x) = (x+1)y(x).$$

9. Déterminer les solutions de (E) définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

   L'équation (E) est, sur les intervalles donnés, équivalente à : $y'(x) - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) y(x) = 0.$

   Or, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ *sur* $]0;+\infty[$ *est donnée par* $x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{x}$ *et sur* $]0;+\infty[$ *par* $x \mapsto \ln(-x) - \dfrac{1}{x}$.

   Ainsi, les solutions de (E) sont :

   - *Sur* $]0;+\infty[$, $y : x \mapsto \lambda \exp(\ln(x) - \dfrac{1}{x}) = \lambda x e^{-1/x}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - *Sur* $]-\infty;0[$, $y : x \mapsto \mu \exp(\ln(-x) - \dfrac{1}{x}) = -\mu x e^{-1/x}$ *avec* $\mu \in \mathbb{R}$.
     Ces dernières solutions peuvent se réécrire également : $x \mapsto \mu x e^{-1/x}$ *avec* $\mu \in \mathbb{R}$.

10. En déduire les solutions de (E) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

    La question précédente nous assure que : si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
    $\begin{cases} y(x) = \lambda x e^{-1/x} = \lambda f(x) & \textit{si} \quad x > 0 \\ y(x) = \mu x e^{-1/x} = \mu f(x) & \textit{si} \quad x < 0 \end{cases}.$

    Ainsi, on cherche les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction

    $$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda f(x) & \textit{si} \quad x > 0 \\ \mu f(x) & \textit{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

    se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

    Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

    - *Les théorèmes usuels nous assurent que $y_{\lambda,\mu}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sur $\mathbb{R}_-^\star$.*
    - *La fonction $y_{\lambda,\mu}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?*
      - ⋆ *Pour $x > 0$,* $y_{\lambda,\mu}(x) = \lambda f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$

- ⋆ *La limite de* $\lim_{x\to 0^-} y_{\lambda,\mu}(x)$ *n'est finie qu'à condition que* $\mu = 0$*, dans ce cas* $\lim_{x\to 0^-} y_{\lambda,\mu}(x) = 0$.
- ⋆ *On en déduit que* $\boxed{y_{\lambda,\mu} \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ si et seulement si } \mu = 0}$.

On note ce prolongement

$$\tilde{y}_{\lambda,0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda f(x) & \textit{si} \quad x > 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

- *La fonction* $\tilde{y}_{\lambda,0}$ *est-elle dérivable en* 0 *et, si oui, la dérivée est-elle continue en* 0 *?*
  - ⋆ *On a, pour tout* $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$\left(\tilde{y}_{\lambda,0}\right)'(x) = \begin{cases} \lambda f'(x) = \lambda\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & \textit{si} \quad x > 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

  Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $Xe^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *par croissance comparée, on a par composition des limites* $\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

  On en déduit que : $\lim_{x\to 0^+} \left(\tilde{y}_{\lambda,0}\right)'(x) = 0$. *Comme* $\lim_{x\to 0^-} \left(\tilde{y}_{\lambda,0}\right)'(x) = 0$*, on a* $\boxed{\lim_{x\to 0} \left(\tilde{y}_{\lambda,0}\right)'(x) = 0}$.
  - ⋆ *Le théorème de la limite de la dérivée nous assure que la fonction* $\tilde{y}_{\lambda,0}$ *est dérivable en* 0 *avec* $\left(\tilde{y}_{\lambda,0}\right)'(0) = 0$ *et, de plus,* $\left(\tilde{y}_{\lambda,0}\right)'$ *est continue en* 0. *Donc* $\tilde{y}_{\lambda,0}$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
- *Conclusion : les solutions de* (E) *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions :*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda f(x) & \textit{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \end{array} \quad \textit{pour } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Partie C : Etude d'une suite récurrente

On définit, par récurrence, la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

11. Justifier que (u_n) est une suite positive.

    L'intervalle $\mathbb{R}_+$ *est stable par* f*, donc, par récurrence immédiate,* (u_n) *est bien définie et positive.*

12. Vérifier que, sur $\mathbb{R}_+$, f' est croissante et majorée par 1 strictement.

    Sur $\mathbb{R}_+$, $\quad f' : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ *et a pour dérivée* $f'' : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} > 0$.

    Donc f' *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$ *et de limite en* $+\infty$ *valant* 1. *La limite n'étant pas atteinte,* $\boxed{\text{la fonction } f' \text{ est une fonction croissante majorée par } 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

13. Justifier que, pour tout $x \in [0; u_0]$, on a

$$|f(x)| \leqslant |f'(u_0)|\,|x|.$$

- *Si* $u_0 = 0$*, l'inégalité est trivialement satisfaite.*
- *Si* $u_0 > 0$*, on sait que* f *est dérivable sur* $[0; u_0]$ *et, par croissance de* f' *sur* $\mathbb{R}_+$*, que pour tout* $x \in [0; u_0]$, $\left|f'(x)\right| = f'(x) \leqslant f'(u_0) < 1$.

  L'inégalité des accroissements finis nous assure que :

$$\boxed{\forall x \in [0; u_0], \quad |f(x) - f(0)| \leqslant f'(u_0)|x - 0|, \quad \textit{i.e.} \quad f(x) \leqslant f'(u_0)x}.$$

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant |f'(u_0)|^n\, u_0$.

    L'inégalité précédente nous assure que, pour tout $x \in [0; u_0]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant f'(u_0)x < x \leqslant u_0$. *Autrement dit* $f([0; u_0]) \subset [0; u_0]$ *et* $[0; u_0]$ *est un intervalle stable par* f. *On en déduit, par récurrence immédiate, que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; u_0]$.

    Donc l'inégalité précédente nous assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f'(u_0)u_n$.

    Par récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant f'(u_0)^n u_0}.$$

15. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?

Etant donné que $f'(u_0) < 1$, $f'(u_0)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par théorème d'encadrement, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Partie D : Etude des dérivées successives de f

16. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n-1}} e^{-1/x}.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$\mathscr{P}(n)$:« Il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n-1}} e^{-1/x}$ ».

- *$\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, en posant $P_0 = 1$, on a $\forall x > 0, f^{(0)}(x) = xe^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{P_0(x)}{x^{-1}} e^{-\frac{1}{x}}$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.*
  On sait, par les théorèmes usuels, que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, en particulier $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et, grâce à l'hypothèse de récurrence, on obtient que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{P_n(x)}{x^{2n-1}} e^{-1/x}\right\} \\
&= \frac{P_n'(x)x^{2n-1} - (2n-1)P_n(x)x^{2n-2}}{\left(x^{2n-1}\right)^2} e^{-1/x} + \frac{1}{x^2}\frac{P_n(x)}{x^{2n-1}} e^{-1/x} \\
&= \left(\frac{P_n'(x)x^2 - (2n-1)P_n(x)x}{x^{2n+1}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+1}}\right) e^{-1/x} \\
&= \frac{\overbrace{P_n'(x)x^2 - (2n-1)P_n(x)x + P_n(x)}^{=P_{n+1}(x)}}{x^{2n+1}} e^{-1/x}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée en posant $P_{n+1}(x) = P_n'(x)x^2 - (2n-1)P_n(x)x + P_n(x)$ qui est bien une fonction polynômiale.
- *Par le principe de récurrence la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

17. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x)$.

Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et, par croissance comparée, $X^{2n-1}e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par composition des limites : $\dfrac{1}{x^{2n-1}} e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Etant donné que P_n est polynomiale, P_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to 0} P_n(x) = P_n(0) \in \mathbb{R}$.
Par produit de limites, on obtient que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \quad \lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0}.$$

18. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ ».

- *$\mathscr{P}(0)$ est vraie car on a montré à la question 1. que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, i.e. de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.*
  Par hypothèse de récurrence $f^{(n)}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, comme f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, on sait que $f^{(n)}$ est dérivable (même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+^\star$.
  Enfin, la question précédente nous assure que $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(x) = 0$.
  Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0,
  $f^{(n+1)}(0) = \left(f^{(n)}\right)'(0) = 0$ et, de plus, $f^{(n+1)}$ est continue en 0.
  Autrement dit, $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et on déduit que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
  Ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$.

- *Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.*

19. On rappelle que, pour tout $x \geqslant 0$, $x^2 f'(x) = (x+1)f(x)$.
Démontrer (lien avec la question précédente ?) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, on a
$$\forall x \geqslant 0, \quad x^2 f^{(n+1)}(x) + \big((2n-1)x-1\big)f^{(n)}(x) + n(n-2)f^{(n-1)}(x) = 0.$$
On sait maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc appliquer la formule de Leibniz à chacun des membres de la relation : $\forall x \geqslant 0, \quad x^2 f'(x) = (x+1)f(x)$.
Soit $\boxed{n \geqslant 2}$, on obtient, pour tout $x \geqslant 0$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left\{x^2\right\} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left\{f'(x)\right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left\{x+1\right\} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left\{f(x)\right\}$$
$$\iff \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left\{x^2\right\} f^{(n-k+1)}(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left\{x+1\right\} f^{(n-k)}(x)$$
$$\iff \overbrace{\binom{n}{0}}^{=1} x^2 f^{(n+1)}(x) + \overbrace{\binom{n}{1}}^{=n} (2x) f^{(n)}(x) + \overbrace{\binom{n}{2}}^{=\frac{n(n-1)}{2}} 2 f^{(n-1)}(x) = \overbrace{\binom{n}{0}}^{=1} (x+1) f^{(n)}(x) + \overbrace{\binom{n}{1}}^{=n} f^{(n-1)}(x)$$
$$\iff x^2 f^{(n+1)}(x) + \big((2n-1)x-1\big)f^{(n)}(x) + n(n-2)f^{(n-1)}(x) = 0.$$
Il nous reste à vérifier la relation dans le cas $n = 1$, pour cela il suffit de dériver une fois les membres de l'égalité : $\forall x \geqslant 0, \quad x^2 f'(x) = (x+1)f(x)$. On trouve bien que, pour tout $x \geqslant 0$, $x^2 f''(x) + (x-1)f'(x) - f(x) = 0$.

20. En déduire l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$.
En remplaçant les expressions des dérivées de f en fonction des polynômes et en divisant chaque membre par $e^{-\frac{1}{x}}$, on déduit après calcul que :
$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \quad P_{n+1}(x) = (1-(2n-1)x)P_n(x) - n(n-2)x^2 P_{n-1}(x)}.$$

21. On admet, pour tout $x \geqslant 0$, la relation : $\quad P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + \big(1-(2n-1)x\big)P_n(x)$.
Conclure alors que :
$$P_n' = -n(n-2)P_{n-1}.$$
A l'aide de cette relation et de l'égalité établie à la question précédente, on a
$$\forall x \geqslant 0, \quad x^2 P_n'(x) + (1-(2n-1)x)P_n(x) = (1-(2n-1)x)P_n(x) - n(n-2)x^2 P_{n-1}(x).$$
Ce qui s'écrit : $\boxed{\forall x > 0, \quad P_n'(x) = -n(n-2)P_{n-1}(x)}$.
L'égalité précédente étant une égalité de deux polynômes en une infinité de points, on a même :
$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = -n(n-2)P_{n-1}(x)}$.

22. Justifier la relation : $\quad \forall x \geqslant 0, \quad P_n(x) = 1 - n(n-2)\displaystyle\int_0^x P_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrons la relation précédente entre 0 et x. Alors :
$$\int_0^x (P_n)'(t)\,\mathrm{d}t = -n(n-2)\int_0^x P_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Ce qui s'écrit : $P_n(x) - P_n(0) = -n(n-2)\displaystyle\int_0^x P_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculons $P_n(0)$. On utilise la relation de récurrence obtenue à la question 20. en $x = 0$, il vient immédiatement que $P_{n+1}(0) = P_n(0)$. La suite $(P_n(0))$ est donc constante égale $P_1(0)$. Mais on sait que $f' : x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$, ainsi $P_1(x) = x+1$, donc $P_1(0) = 1$ et $\boxed{P_n(0) = 1}$.
En conclusion : $\boxed{\forall x \geqslant 0, \quad P_n(x) = 1 - n(n-2)\displaystyle\int_0^x P_{n-1}(t)\,dt}$.