Correction du devoir surveillé n°2, lundi 12 octobre 2020

Exercice n°1 Etude d'une fonction trigonométrique - équations trigonométriques

Cet exercice a été corrigé en cours (voir TD n°1 exercice n°22).

Exercice n°2 Etude d'une fonction - résolution d'une équation

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, et le signe est $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ est celui de $1 - \ln x$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$		$+$		0	$-$	
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty.$

(b) L'ensemble image de f est $f(\mathbb{R}_+^\star) = \left]-\infty; \dfrac{1}{e}\right]$.

(c) Clairement, la fonction f n'est pas bijective.
En effet, par lecture dans le tableau, tous les éléments appartenant à $\left]0; \dfrac{1}{e}\right[$ possède deux antécédents par f.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Les quantités 2^x et x^2 étant strictement positives, on a :
$2^x = x^2 \iff \ln(2^x) = \ln(x^2) \iff x\ln 2 = 2\ln x \iff \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln x}{x} \iff f(x) = f(2).$

(b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]1; e[$, strictement décroissante sur $]e; +\infty[$.
Le théorème de la bijection nous assure que :

- f réalise une bijection continue de $]1; e[$ sur $\left]0; \dfrac{1}{e}\right[$. Comme $2 \in]1; e[$, l'équation $f(x) = f(2)$ possède $a = 2$ pour unique solution sur l'intervalle $]1; e[$.
- f réalise une bijection continue de $]e; +\infty[$ sur $\left]0; \dfrac{1}{e}\right[$. Comme $f(2) \in \left]0; \dfrac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x) = f(2)$ possède une unique solution b sur l'intervalle $]e; +\infty[$.

(c) Etant donné que, pour tout $0 < x \leqslant 1$, $f(x) \leqslant 0 < f(2)$ et $f(e) \neq f(2)$, l'équation (E) possède exactement deux solutions, a et b, sur $\mathbb{R}_+^\star$. En remarquant que 4 est solution de (E), car $2^4 = 4^2$, 4 est l'unique solution appartenant à $]e; +\infty[$, donc $b = 4$.
$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont } 2 \text{ et } 4}$.

Problème n°1 Sommes classiques - Manipulations de sommes - Sommes télescopiques

1. **Méthode n°1 : (par récurrence)** Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ et $\dfrac{0.(0+1)(2.0+1)}{6=0}$, d'où l'égalité.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$: « $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1)(2n+3)}{6}$ ».

  On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 &= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{[grâce à l'hypothèse de récurrence]}\\ &= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(6(n+1) + n(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. **Méthode n°2 : (par somme télescopique)**

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

   (b) Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $(k+1)^3 - k^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

   On en déduit que :

$$\begin{aligned}T_n = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3] &= \sum_{k=0}^{n}[3k^2 + 3k + 1]\\ &= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1\\ &= 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1).\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{T_n = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)}$.

   (c) On remarque que T_n est une somme télescopique, ce qui nous permet d'écrire :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3.$$

   Donc $\boxed{T_n = (n+1)^3}$.

   (d) En combinant les résultats obtenus aux deux questions précédentes, on obtient : $(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$.
   C'est-à-dire :
   $S_n = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\right] = \frac{n+1}{3} \times \frac{2(n+1)^2 - 3n - 2}{2} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   En conclusion, $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

3. **Méthode n°3 : (par somme binomiale)**

   (a) Rappels :

   - Formule de Pascal : Soit $p \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in [\![0;p]\!]$, on a $\boxed{\binom{p}{l-1} + \binom{p}{l} = \binom{p+1}{l}}$.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, on a $\boxed{\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}}$.

(b) On peut raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$ pour montrer cette relation. On propose ici plutôt de réécrire la somme $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}$ comme une somme télescopique à l'aide de la relation de Pascal. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n} \left[\binom{k+1}{3} - \binom{k}{3}\right] \quad \text{[A l'aide de la formule de Pascal]}\\ &= \binom{n+1}{3} - \overbrace{\binom{2}{3}}^{=0} \quad \text{[On a reconnu une somme télescopique]}\\ &= \binom{n+1}{3}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}$. Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = 2\binom{n+1}{3} = 2\,\frac{(n+1)!}{3!\,(n-2)!} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$. Etant donné que $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k = S_n - \sum_{k=0}^{n} k = S_n - \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient grâce au résultat obtenue à la question précédente que : $S_n - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, i.e.

$$S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2(n-1)+3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Cette dernière relation étant vérifiée également pour $n=0$ et $n=1$, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

4. **Méthode n°4 : (par somme double)**

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. La somme triangulaire $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} j$ se réécrit :

- soit : $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} j\right) = \sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum_{j=0}^{n} j^2 = S_n$.
- soit : $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(n-i+1)(n+i)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n^2 - i^2 + n + i) = \frac{1}{2}\left[n^3 - S_n + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right]$

Tout cela implique que : $2S_n = n^3 - S_n + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$, i.e.

$$S_n = \frac{1}{3}\left[n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{2n^3 + 2n^2 + n(n+1)}{6} = \frac{2n^2(n+1) + n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Cette dernière relation étant vérifiée dans le cas $n=0$, on obtient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

Problème n°2 Fonctions hyperboliques - Étude d'une fonction réciproque

1. **Partie n°1 : (Propriétés des fonctions ch et sh)**

(a) On définit ch et sh sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$ et $\boxed{\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$, donc $\boxed{\text{ch est une fonction paire}}$ et $\boxed{\text{sh est une fonction impaire}}$.

(b) Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)}$ et $\boxed{\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)}$.

(c) Du fait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$, on obtient les variations et le signe de sh. On en déduit les variations de ch. Le calcul des limites ne donne lieu à aucune forme indéterminée :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}(x)$	$+$	1	$+$
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}(x)$	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) = e^x \times e^{-x} = 1$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1}$.

(e) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

-
$$\begin{aligned}
\text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\
&= \frac{(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-(x+y)}) + (e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-(x+y)})}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \text{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned}
\text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y) &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\
&= \frac{(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}) + (e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)})}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \text{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

Donc, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y) \quad \text{et} \quad \text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)}$.

2. **Partie n°2 : (Calcul d'un produit télescopique)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \text{ch}\left(2^k\right)$$

(a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$, en utilisant la relation obtenue à la question 1. (e), on obtient $\text{sh}\left(2^{k+1}\right) = \text{sh}\left(2^k + 2^k\right) = \text{sh}\left(2^k\right)\text{ch}\left(2^k\right) + \text{ch}\left(2^k\right)\text{sh}\left(2^k\right) = 2\text{sh}\left(2^k\right)\text{ch}\left(2^k\right)$.

(b) De la relation obtenue à la question précédente, on obtient que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\text{ch}\left(2^k\right) = \dfrac{\text{sh}\left(2^{k+1}\right)}{2\text{sh}\left(2^k\right)}$.

On en déduit que :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \text{ch}\left(2^k\right) = \prod_{k=0}^{n} \frac{\text{sh}\left(2^{k+1}\right)}{2\text{sh}\left(2^k\right)} = \frac{1}{2^{n+1}} \underbrace{\prod_{k=0}^{n} \frac{\text{sh}\left(2^{k+1}\right)}{\text{sh}\left(2^k\right)}}_{\text{produit télescopique}}$$

(c) Après avoir écrit P_n comme un produit télescopique, on en déduit que :

$$\boxed{P_n = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\text{sh}\left(2^{n+1}\right)}{\text{sh}\left(2^0\right)} = \frac{1}{\text{sh}(1)} \frac{\text{sh}\left(2^{n+1}\right)}{2^{n+1}}}.$$

3. **Partie n°3 : (La fonction th)** On pose $\text{th} : x \mapsto \text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

(a) La fonction th est définie, continue et dérivable sur $D = \mathbb{R}$ comme quotient de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ où le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{th}'(x) = \dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)}$, ainsi :

- d'une part, à l'aide de 1. (d), $\boxed{\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}}$.

- d'autre part, $\boxed{\text{th}'(x) = \dfrac{\text{ch}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} - \dfrac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x)}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a par parité de ch et sh : $\text{th}(-x) = \dfrac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = -\dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = -\text{th}(x)$.

Donc $\boxed{\text{th est une fonction impaire}}$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$, on obtient les variations de th sur $D = \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{th}'(x)$	$+$	1	$+$
th	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ 1

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \times \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

On déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$, et, par imparité de th, que $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{th}(x) = -1$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \text{th}(x) = -1}$.

4. **Partie n°4 : (La fonction argth)**

(a) De la partie n°3, on déduit que th est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le théorème de la bijection nous assure que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\text{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[= J$.

On note alors argth $:]-1;1[\to \mathbb{R}$ *la bijection réciproque de la fonction* th $: \mathbb{R} \to]-1;1[$.

(b) Etant donné que th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le théorème de la bijection nous assure qu'il en est de même pour argth. On en déduit le tableau de variation suivant :

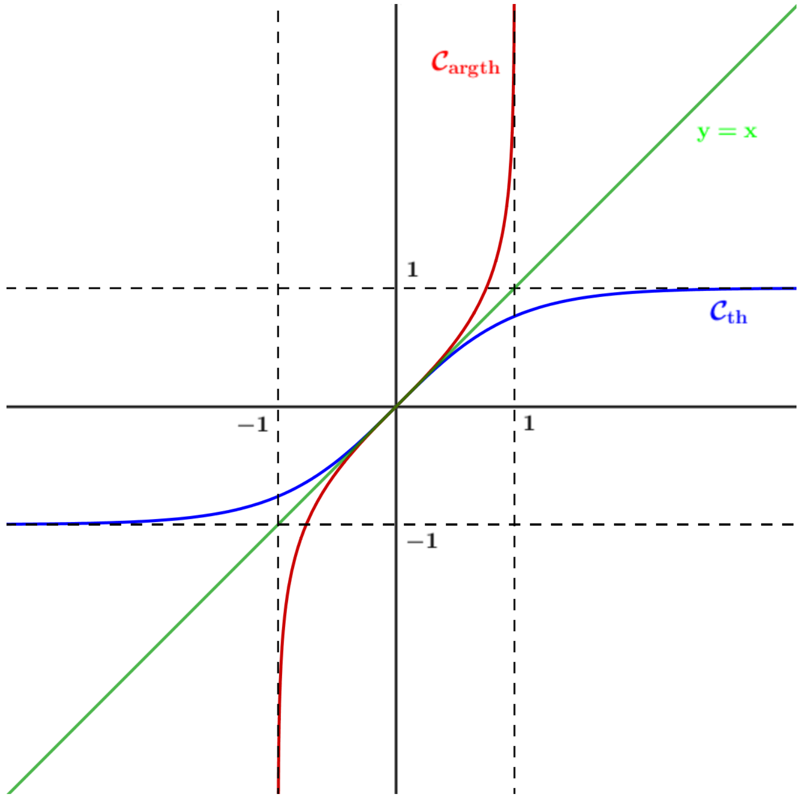
x	-1	0	1
argth	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$, en particulier $\text{th}'(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivabilité de la réciproque nous assure alors que argth est dérivable sur $]-1;1[$. De plus, pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$\begin{aligned}
\text{argth}'(x) &= \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}(x))} \\
&= \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{argth}(x))} \quad \text{[grâce à 3. (a)]} \\
&= \frac{1}{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-1;1[$, $\boxed{\text{argth}'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}}$.

(d) Une allure des courbes représentatives des fonctions th et argth est donnée par :



(e) On sait que, pour tout $y \in]-1;1[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\text{th}(x) = y$, de plus $x = \text{argth}(y)$.
Soit $y \in]-1;1[$. On résout l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\text{th}(x) = y$.

$$\begin{aligned}\text{th}(x) = y &\iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y\\ &\iff e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1)\\ &\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}\\ &\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-1;1[$, $\boxed{\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$.

(f)
- Etant donné que argth est définie sur $]-1;1[$, l'ensemble de résolution de cette équation est $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$.
- En utilisant l'expression de argth obtenue à la question précédente, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned}\text{argth}(x) + \text{argth}(2x) = \frac{1}{2}\ln(3) &\iff \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) = \ln(3)\\ &\iff \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \times \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) = 3 \quad \text{[en prenant l'exponentielle de chaque membre]}\\ &\iff (1+x)(1+2x) = 3(1-x)(1-2x)\\ &\iff 2x^2 - 6x + 1 = 0\end{aligned}$$

Cette dernière équation possède deux solutions : $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$.
Comme $2 < \sqrt{7} < 3$, on a $\frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ et $0 < \frac{3-\sqrt{7}}{2} < \frac{1}{2}$.
Donc l'équation admet une unique solution qui est $\boxed{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆