Correction du devoir surveillé n°3, lundi 30 novembre 2020

Exercice n°1 Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

1. Déterminer les racines carrées de $-48+14i$. (On pourra utiliser : $\sqrt{48^2+14^2}=50$).

   On cherche les racines carrées de $-48+14i$ sous la forme $u=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ainsi, $u^2=-48+14i$. On obtient alors :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-48 & \text{[égalité des parties réelles]} \\ x^2+y^2=\sqrt{48^2+14^2} & \text{[égalité des modules]} \\ 2xy=14 & \text{[égalité des parties imaginaires]} \end{cases}$$

   Ainsi : $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=49 \end{cases}$ *et donc* $\begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=7 \text{ ou } y=-7 \end{cases}$. *Comme $xy=7>0$, x et y ont le même signe.*

   Finalement $\boxed{\text{les racines carrées de } -48+14i \text{ sont } 1+7i \text{ et } -1-7i}$.

2. Déterminer les racines cubiques de $1-i$.
   On donnera leur expression sous forme trigonométrique.

   On sait que $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. *Ainsi, l'ensemble des racines cubiques de* $1-i=2^{1/2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ *est*

$$\boxed{\left\{2^{1/6}e^{-i\frac{\pi}{12}+\frac{2ik\pi}{3}} \mid k\in[\![0;2]\!]\right\}=\left\{2^{1/6}e^{-i\frac{\pi}{12}};2^{1/6}e^{i\frac{7\pi}{12}};2^{1/6}e^{i\frac{15\pi}{12}}\right\}}.$$

3. Déterminer les racines cubiques de $-8i$.
   On donnera leur expression sous forme trigonométrique puis algébrique.

   On sait que $-8i=8e^{-i\frac{\pi}{2}}$. *Ainsi, l'ensemble des racines cubiques de* $-8i=2^3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ *est*

$$\boxed{\left\{2e^{-i\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{3}} \mid k\in[\![0;2]\!]\right\}=\left\{2e^{-i\frac{\pi}{6}};2e^{i\frac{\pi}{2}};2e^{i\frac{7\pi}{6}}\right\}}.$$

   La forme algébrique des racines cubiques de $-8i$ est :
   $2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{3}-i$, $\quad 2e^{-i\frac{\pi}{2}}=2i$ *et* $2e^{i\frac{7\pi}{6}}=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=-\sqrt{3}-i$.

4. Résoudre l'équation (E_1) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$z^2+(-1+9i)z-8-8i=0.$$

   Soit $z\in\mathbb{C}$. Le discriminant de l'équation $z^2+(-1+9i)z-8-8i=0$ est $(-1+9i)^2+4(8+8i)=-48+14i$.
   D'après la question 1., ses racines carrées sont : $1+7i$ et $-1-7i$.

   Ainsi les solution de (E_1) sont : $\boxed{\frac{1-9i-1-7i}{2}=-8i \text{ et } \frac{1-9i+1+7i}{2}=1-i}$.

5. On considère l'équation (E_2) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$z^6+(-1+9i)z^3-8-8i=0.$$

   Donner la forme trigonométrique des solutions de (E_2).

   Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $Z=z^3$, l'équation (E_2) se réécrit alors $Z^2+(-1+9i)Z-8-8i=0$.
   Ainsi, z est solution de (E_2) si et seulement si Z est solution de (E_1).
   Donc, en utilisant la question précédente, $Z=-8i$ ou $Z=1-i$. D'après les questions 2. et 3., les solutions de $z^3=-8i$ ou $z^3=1-i$ sont $2^{1/6}e^{-i\frac{\pi}{12}};2^{1/6}e^{i\frac{7\pi}{12}};2^{1/6}e^{i\frac{15\pi}{12}};2e^{-i\frac{\pi}{6}};2e^{i\frac{\pi}{2}};2e^{i\frac{7\pi}{6}}$. Donc, les solutions de (E_2) sont :

$$\boxed{2^{1/6}e^{-i\frac{\pi}{12}};2^{1/6}e^{i\frac{7\pi}{12}};2^{1/6}e^{i\frac{15\pi}{12}};2e^{-i\frac{\pi}{6}};2e^{i\frac{\pi}{2}};2e^{i\frac{7\pi}{6}}}.$$

Exercice n°2 Etude d'une équations de degré 3

On considère le polynôme $P(x)=x^3-3x+1$.

1. Prouver que l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$ possède exactement trois solutions réelles.

   On étudie la fonction polynomiale (et donc dérivable) P sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$.
   On résume le signe de P' et les variations de P dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction P est continue strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$, $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$.
   Le théorème de la bijection continue nous assure que P réalise une bijection sur chacun de ces intervalles.
   De plus $0 \in P(]-\infty;-1]) =]-\infty;3]$, $0 \in P([-1;1]) = [-1;3]$ et $0 \in P([1;+\infty[) = [-1;+\infty[$.
   Donc 0 possède un unique antécédent sur chacun des intervalles cités.
   $\boxed{\textit{L'équation } P(x)=0 \textit{ d'inconnue } x \in \mathbb{R} \textit{ possède donc exactement trois racines réelles}}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(\theta)$.

   Après linéarisation (voir cours), on trouve : $\boxed{\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)}$.

3. Déterminer alors les valeurs du réel θ telles que $P(2\cos(\theta)) = 0$.

   Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
P(2\cos(\theta)) = 0 &\iff (2\cos(\theta))^3 - 3(2\cos(\theta)) + 1 = 0 \\
&\iff 8\cos^3(\theta) - 6\cos(\theta)) + 1 = 0 \\
&\iff 8\left(\frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)\right) - 6\cos(\theta)) + 1 = 0 \\
&\iff 2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta) - 6\cos(\theta)) + 1 = 0 \\
&\iff \cos(3\theta) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&\iff \begin{cases} 3\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \\ 3\theta \equiv -\frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \theta \equiv \frac{2\pi}{9} \ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ \theta \equiv -\frac{2\pi}{9} \ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}
\end{aligned}$$

   L'ensemble des valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ recherchées est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

4. Conclure sur les trois racines de P.

   L'ensemble des éléments $\cos(\theta)$ pour $\theta \in \mathscr{S}$ est composée de trois éléments, en effet :

$$\begin{aligned}
\cos(\mathscr{S}) &= \left\{\cos\left(\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{\cos\left(\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}\right) \mid k \in [\![0;2]\!]\right\} \bigcup \left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}\right) \mid k \in [\![-2;0]\!]\right\} \quad \textit{[Par } 2\pi\textit{-périodicité de } \cos\textit{]} \\
&= \left\{\cos\left(\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}\right) \mid k \in [\![0;2]\!]\right\} \quad \textit{[Par parité de } \cos\textit{]} \\
&= \left\{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \ ; \ \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) \ ; \ \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right\}
\end{aligned}$$

   Conclusion, les trois racines réelles recherchées sont :

$$\boxed{2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right), \quad 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) \quad \textit{et} \quad 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)}.$$

Exercice n°3 Calcul d'un somme à l'aide des nombres complexes

1. Soient $x \in]0; 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme
$$A = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$
Simplifier cette somme et la mettre sous la forme $re^{i\alpha}$ avec $r, \alpha \in \mathbb{R}$.

Etant donné que $x \in]0; 2\pi[$, $e^{ix} \neq 1$. On a alors (voir cours) :
$$\boxed{A = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}_{=r} e^{i\overbrace{\frac{nx}{2}}^{=\alpha}}}.$$

2. On suppose maintenant que $n \geqslant 2$, et on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

(a) Justifier que : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Comme $\sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) = \sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \sin(\pi) = 0$, on a :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Donc $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

(b) A l'aide de la question 1., prouver que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

On remarque que : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathit{Im}\left(e^{i\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right) = \mathit{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}}\right)$.

Ainsi, d'après la question 1. (appliquée au cas $x = \frac{\pi}{n} \in]0; 2\pi[$), on obtient
$$S_n = \mathit{Im}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Donc $\boxed{S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$.

(c) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

En utilisant la relation précédente dans la cas $n = 4$, on trouve :
$$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sum_{k=1}^{3} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1.$$

D'où : $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1}$.

Exercice n°4 Résolutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) On considère la fonction $f : t \to \dfrac{1}{t^2 + 4t + 8}$.
Etudier l'existence puis déterminer une primitive de f.

Le discriminant du trinôme du second degré t^2+4t+8 est égal à $-16<0$. Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t^2+4t+8>0$. La fonction f est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle possède donc des primitive sur cet intervalle, toutes égales à une constante près. Ces primitives sont données par :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+4t+8}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{4+(t+2)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}t+1\right)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{1}{2}t+1\right)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}t+1\right)\ (+C)\quad \textit{[avec } C\in\mathbb{R}\textit{]}.\end{aligned}$$

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par : $\boxed{t\to\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}t+1\right)}$.

(b) Résoudre l'équation différentielle $\quad (E_1):\quad \forall t\in\mathbb{R},\ (1+t^2)y'(t)+2ty(t)=\dfrac{1}{t^2+4t+8}$.

L'équation (E_1) est une EDL d'ordre 1 avec second membre. L'équation homogène associée est donnée par : $\forall t\in\mathbb{R},\ (1+t^2)y'(t)+2ty(t)=0$, qui est équivalente à : $\forall t\in\mathbb{R},\ y'(t)+\dfrac{2t}{1+t^2}y(t)=0$ (car $1+t^2>0$), et a pour solution générale :

$$t\mapsto \lambda e^{-\int\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}=\lambda e^{-\ln(1+t^2)}=\frac{\lambda}{1+t^2}\quad \textit{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière à (E_1) sous la forme $f_P: t\mapsto \dfrac{\alpha(t)}{1+t^2}$ avec α une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}f_P \textit{ solution de } (E_1) &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ (1+t^2)f_P'(t)+2tf_P(t)=\frac{1}{t^2+4t+8}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ (1+t^2)\left(\frac{\alpha'(t)(1+t^2)-2t\alpha(t)}{(1+t^2)^2}\right)+2t\frac{\alpha(t)}{1+t^2}=\frac{1}{t^2+4t+8}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ \alpha'(t)=\frac{1}{t^2+4t+8}\end{aligned}$$

Donc, on peut choisir pour α une primitive de f sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, la solution générale de (E_1) est donnée par :

$$\boxed{t\mapsto \frac{1}{1+t^2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}t+1\right)\right)\quad \textit{avec } \lambda\in\mathbb{R}}.$$

2. (a) Déterminer une solution particulière à l'équation :

$$(E_c):\quad \forall t\in\mathbb{R},\ y''(t)-2y'(t)+2y(t)=e^{(1+i)t}.$$

L'équation caractéristique associée à (E_c) est : $r^2-2r+2=0$, de discriminant $-4<0$ et de racines : $1+i$ et $1-i$. Ainsi, une solution particulière de (E_c) est donnée par $f_P: t\mapsto Cte^{(1+i)t}$ avec $C\in\mathbb{C}$ car $1+i$ est racines simple de l'équation caractéristique. Comme, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f_P'(t)=C\left((1+i)t+1\right)e^{(1+i)t}$ et $f_P''(t)=2C\left(it+1+i\right)e^{(1+i)t}$, on a

$$\begin{aligned}f_P \textit{ solution de } (E_1) &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ f_P''(t)-2f_P'(t)+2f_P(t)=e^{(1+i)t}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ \left(2C\left(it+1+i\right)e^{(1+i)t}\right)-2\left(C\left((1+i)t+1\right)e^{(1+i)t}\right)+2Cte^{(1+i)t}=e^{(1+i)t}\\ &\iff 2iC=1\\ &\iff C=-\frac{i}{2}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_c) est donnée par : $\quad f_P: t\mapsto -\dfrac{i}{2}te^{(1+i)t}$.

(b) En déduire la solution générale de l'équation différentielle

$$(E_2):\quad \forall t\in\mathbb{R},\ y''(t)-2y'(t)+2y(t)=\sin(x)e^x.$$

Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_2) étant $1-i$ et $1+i$, la solution générale de l'équation homogène associée à (E_2) est :

$$t\mapsto e^t\left(\lambda\cos(t)+\mu\sin(t)\right)\quad \textit{avec}\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

L'équation complexifiée associée à (E_2) étant donnée par (E_c), une solution particulière de (E_2) est donnée par : $t\mapsto \boldsymbol{Im}\left(-\dfrac{i}{2}te^{(1+i)t}\right)=-\dfrac{1}{2}t\cos(t)e^t$.

Donc la solution générale de (E_2) est donnée par :

$$\boxed{t \mapsto -\frac{1}{2} t\cos(t)e^t + e^t\left(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)\right) \quad \textit{avec} \quad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}}.$$

Exercice n°5 Résoudre une équation fonctionnelle par analyse-synthèse

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(P): \quad f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \boxed{\text{et}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\, f'(x) + f(-x) = e^x$$

On raisonne par analyse-synthèse.

1. **Analyse :** Soit f une fonction vérifiant (P).

   (a) Justifier le fait que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. La fonction $x \mapsto f(-x)$ composée des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: f et $x \mapsto -x$, est également dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - f(-x)$, la fonction f' dérivée de f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, sa dérivée seconde est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

   $$(f')'(x) = f''(x) = e^x + f'(-x). \tag{1}$$

   (b) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants à déterminer.

   Etant donné que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - f(-x)$, on également, $f'(-x) = e^{-x} - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la relation (1) *montrée à la question précédente, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$*

   $$f''(x) + f(x) = 2\cosh x. \tag{2}$$

   Donc, si f est solution du problème (P) alors f est nécessairement solution de l'équation différentielles linéaire d'ordre deux ci-dessus.

   (c) En déduire la forme sous laquelle s'écrit nécessairement la fonction f.

   On résout l'équation (2)*. Les solutions de l'équation homogène associée sont $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$, avec λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ de racines i et $-i$. Une solution particulière évidente est donnée par $x \mapsto \cosh x$ (il suffit de se rappeler que $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$). Ainsi, si f est solution du problème (P) alors f est nécessairement de la forme*

   $$x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \cosh x \quad \textit{avec } \lambda \textit{ et } \mu \textit{ réels.}$$

2. **Synthèse :** Déterminer, parmi les fonctions candidates obtenues à la question précédente, quelles sont celles qui vérifient effectivement (P).

   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On considère f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \cosh x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, donc

   $$\begin{aligned}
   f \textit{ sera solution du problème} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x \\
   &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -\lambda\sin x + \mu\cos x + \sinh x + \lambda\cos(-x) + \mu\sin(-x) + \cosh(-x) = e^x \\
   &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu)\cos x - (\lambda + \mu)\sin x = 0 \quad \textit{(par parité de } \cos, \cosh \textit{ et imparité de } \sin\textit{)} \\
   &\iff \lambda = -\mu.
   \end{aligned}$$

   En fin de compte, les solutions du problème (P) sont les fonctions

   $$\boxed{x \mapsto \lambda(\cos x - \sin x) + \cosh x \quad \textit{avec } \lambda \textit{ décrivant } \mathbb{R}}.$$

3. Conclure.

Exercice n°6 Etablir une relation

L'objectif de cet exercice est d'établir la relation :

$$(\star): \quad \forall x \in [-2; 2], \quad \arcsin\left(\frac{4x}{4 + x^2}\right) = 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. **Préliminaires :**

   (a) Rappeler la définition de chacune des fonctions arcsin et arctan, puis leurs ensembles de continuité et de dérivabilité.

   Voir Cours.

(b) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \dfrac{4x}{4+x^2} \leqslant 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \frac{4x}{4+x^2} \leqslant 1 &\iff -(4+x^2) \leqslant 4x \leqslant 4+x^2 \\
&\iff -(4+4x+x^2) \leqslant 0 \leqslant 4-4x+x^2 \\
&\iff -(x+2)^2 \leqslant 0 \leqslant (x-2)^2
\end{aligned}$$

Ces dernières inégalités étant toujours vraies, il en est de même pour les inégalités à montrer, donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \frac{4x}{4+x^2} \leqslant 1}.$$

(c) En déduire que chacun des termes présents dans $(\star)$ est bien défini sur $[-2;2]$.

L'inégalité précédente nous assure que le terme $\arcsin\left(\dfrac{4x}{4+x^2}\right)$ *est bien définie sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-2;2]$.*

Le terme $\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ *étant bien définie sur $\mathbb{R}$, il l'est en particulier sur $[-2;2]$.*

2. **Méthode n°1 :**
On considère la fonction $f : x \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{4x}{4+x^2}\right) - 2\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, définie sur $[-2;2]$.

(a) Déterminer les ensembles de continuité et de dérivabilité de f.

La fonction $\boxed{f \textit{ est continue sur } [-2;2]}$ *par opérations sur les fonctions continues.*

La fonction f est dérivable en tout point $x \in [-2;2]$ en lequel $\dfrac{4x}{4+x^2} \notin \{-1;1\}$ (car $\arcsin$ n'est pas dérivable en 1 et -1). Or, pour tout $x \in [-2;2]$, $\dfrac{4x}{4+x^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $\dfrac{4x}{4+x^2} = -1 \Leftrightarrow -(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Ainsi, la fonction $\boxed{f \textit{ est dérivable par opérations sur }]-2;2[}$.

(b) Etudier la fonction f.

Comme f est dérivable sur $]-2;2[$, on a, pour tout $x \in]-2;2[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4(4+x^2)-4x(2x)}{(4+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4x}{4+x^2}\right)^2}} - 2\frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4(4-x^2)}{(4+x^2)^2}\frac{4+x^2}{\sqrt{(4+x^2)^2-(4x)^2}} - \frac{4}{4+x^2} \\
&= \frac{4(4-x^2)}{4+x^2}\frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^2}} - \frac{4}{4+x^2} \\
&= \frac{4(4-x^2)}{4+x^2}\frac{1}{|4-x^2|} - \frac{4}{4+x^2} \\
&= \frac{4(4-x^2)}{4+x^2}\frac{1}{4-x^2} - \frac{4}{4+x^2} \quad \textit{car } x \in]-2;2[\textit{, donc } 4-x^2>0 \\
&= \frac{4}{4+x^2} - \frac{4}{4+x^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est constante sur l'intervalle $]-2;2[$. Comme $f(0) = \arcsin(0) - 2\arctan(0) = 0$, on en déduit la relation $(\star)$ pour tout $x \in]-2;2[$.

(c) En déduire la relation $(\star)$.

Il reste à justifier que la relation $(\star)$ est également valide en $x = 2$ et $x = -2$, ce qui est une simple vérification :

$$f(2) = \arcsin(1) - 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2} - 2.\frac{\pi}{4} = 0$$
$$f(-2) = \arcsin(-1) - 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2} - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Conclusion : la relation $(\star)$ est donc bien vraie.

3. **Méthode n°2 :**
Soit $x \in]-2;2[$. On note : $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{4x}{4+x^2}\right)$ et $\beta = 2\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

(a) Justifier que : $\forall y \in [-1;1], \quad \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$.

Voir cours.

(b) Justifier l'existence des quantités $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$, puis les comparer.

On a vu à la question précédente que les quantités α et β sont bien définies pour tout $x \in]-2;2[$.
Comme $\alpha \in [-1;1] \subset \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(\alpha)$ est bien définie. De même, pour $x \in]-2;2[$, $\frac{x}{2} \in]-1;1[$ et par stricte croissance de $2\arctan$ sur $]-1;1[$, on a $2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; donc $\tan(\beta)$ est bien définie.
On a grâce à la question (a) :

$$\tan(\alpha) = \tan\left(\arcsin\left(\frac{4x}{4+x^2}\right)\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{4x}{4+x^2}\right)\right)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{4x}{4+x^2}\right)\right)} = \frac{\frac{4x}{4+x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{4x}{4+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{4+x^2}\frac{4+x^2}{\sqrt{(4+x^2)^2-(4x)^2}} = \frac{4x}{|4-x^2|} = \frac{4x}{4-x^2}.$$

$$\tan(\beta) = \tan\left(2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\tan^2\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \frac{x}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{4x}{4-x^2}.$$

Donc $\boxed{\tan(\alpha) = \tan(\beta)}$.

(c) En déduire la relation $(\star)$.

On sait que $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$. Les quantités α et β appartenant toutes les deux à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, et $\tan$ réalisant une bijection sur cet intervalle, on déduit que $\alpha = \beta$. Ce qui montre la relation $(\star)$ pour tout $x \in]-2;2[$. On montre comme à la question 2.(c) que la relation est également vraie pour $x = 2$ et $x = -2$.

Exercice n°7 Résolution d'une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation :

$$(E): \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 2x.$$

1. Résoudre $(E_1): \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 2e^t$.

L'équation caractéristique associée à (E_1) est : $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui a pour discriminant 0 et pour racine double 1.
La solution générale de l'équation homogène associée à (E_1) est $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Etant donné que 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière à (E_1) sous la forme $f_P : t \mapsto Ct^2e^t$ avec $C \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_P'(t) = C(t^2+2t)e^t$ et $f_P''(t) = C(t^2+4t+2)e^t$, on a

$$\begin{aligned} f_P \text{ solution de } (E_1) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ f_P''(t) - 2f_P'(t) + f_P(t) = 2e^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ C(t^2+4t+2)e^t - 2\left(C(t^2+2t)e^t\right) + Ct^2e^t = 2e^t \\ &\iff 2C = 2 \\ &\iff C = 1. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_1) est donnée par $f_P : t \mapsto t^2e^t$. Donc la solution générale de l'équation (E_1) est

$$\boxed{t \mapsto t^2e^t + (\lambda t + \mu)e^t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}.$$

2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad z(t) = y(e^t)$.

(a) Justifier que z est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que z est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ en fonction de y et de ses dérivées.

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$. Ainsi, comme y est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{z'(t) = e^ty'(e^t)}$.

(b) Justifier que z' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z''(t)$ en fonction de y et de ses dérivées.

Comme y est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^\star$, la fonction y' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Ainsi la fonction $t \mapsto y'(e^t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée et z' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t)}$.

(c) En déduire que z est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.

On a :

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 2e^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t) - 2\left(e^ty'(e^t)\right) + y(e^t) = 2e^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t}y''(e^t) - e^ty'(e^t) + y(e^t) = 2e^t \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 2x \quad [\text{car } \exp \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star] \\ &\iff y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star \end{aligned}$$

Donc $\boxed{z \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{si et seulement si} \quad y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star}$.

3. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $y(x)$ à l'aide de la fonction z, puis résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $y(x) = y\left(e^{\ln x}\right) = z(\ln x)$.
   Par la question précédente, y est solution sur $\mathbb{R}_+^\star$ si et seulement si, y s'écrit :

$$y(x) = x(\ln x)^2 + x(\lambda \ln(x) + \mu) \quad \textit{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

   Les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\boxed{x \mapsto x(\ln^2(x) + \lambda \ln(x) + \mu) \quad \textit{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}.$$

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆