Correction devoir surveillé n°5, lundi 15 février 2021

Exercice n°1 Quelques dénombrements

On dispose de trois couleurs (rouge, vert, bleu), avec lesquelles on souhaite colorier les cases suivantes - chaque case étant coloriée d'une couleur :

Déterminer, en justifiant votre réponse :

1. le nombre total de coloriages possibles ;

   Il y a 9 cases, et 3 choix possibles par case, donc 3^9 possibilités.

2. le nombre de coloriages avec des lignes unicolores ;

   Il y a trois choix de couleur par ligne, donc $3^3 = 27$ possibilités.

3. le nombre de coloriages avec au moins une case rouge ;

   Il y a 2^9 coloriages sans case rouge, et donc $3^9 - 2^9$ coloriages avec au moins une case rouge.

4. le nombre de coloriages n'utilisant qu'une ou deux couleurs ;

   Il y a 2^9 coloriages utilisant uniquement deux couleurs parmi les trois et $\binom{3}{2} = 3$ façons de choisir ces deux couleurs. Il y a trois coloriages utilisant une seule couleur. On a donc $3.2^9 + 3$ possibilités.

5. le nombre de coloriages avec exactement trois cases rouges ;

   Il y a $\binom{9}{3}$ façons de choisir l'emplacement des cases rouges, puis 2^6 façons de remplir les 6 cases restantes avec les deux autres couleurs. Il y a donc $2^6.\binom{9}{3}$ possibilités.

6. le nombre de coloriages avec au moins 8 cases rouges.

   Il y a un coloriage avec 9 cases rouges. Choisir un coloriage avec exactement 8 cases rouges revient à choisir l'emplacement et la couleur de la case restante ; dans ce cas, il y a donc $9.2 = 18$ possibilités. Finalement, il y a $18 + 1 = 19$ possibilités.

Exercice n°2 Calculs de limites et une étude de continuité

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[\setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}^\star\}$ par $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 \ln x}{\sin x}$.

   (a) Déterminer la limite de f en 0, soigner la rédaction.

   On a, pour tout $x \in]0; \pi[$,

   $$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} \times x\ln(x).$$

   Or, on a la limite du taux d'accroissement suivant : $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et, par croissance comparée, $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
   Donc par produit des limites : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

(b) Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$, soigner la rédaction.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \textit{et} \quad v_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n.$$

On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(u_n) = 1$ et $\sin(v_n) = -1$, donc $f(u_n) = u_n \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(v_n) = -v_n \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Ainsi, par la caractérisation séquentielle de la limite, f ne possède pas de limite en $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $]-\pi,\, \pi[$ par

$$g :]-\pi,\, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de g sur $]-\pi,\, \pi[$.

Les fonctions $x \mapsto \sin^2 x$ et $x \mapsto 1-\cos x$ ne s'annulant pas sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$, les théorèmes usuels nous assurent que g est continue sur $]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$. Il reste à étudier la continuité en 0.
Pour tout $x \in]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} &= \frac{2}{1-\cos^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} \\
&= \frac{2}{(1-\cos x)(1+\cos x)} - \frac{1}{1-\cos x} \\
&= \frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{2}{1+\cos x} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \\
&= \frac{1}{1+\cos x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 1.
\end{aligned}$$

La limite de g en 0 par valeurs différentes de 0 est différente de $g(0) = 1$, donc g n'est pas continue en 0.

Problème n°1 : Algèbre

Partie A : Trois méthodes pour calculer les puissances d'une matrice

On note $M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que M^2 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I_3 et M, i.e. qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tel que : $M^2 = \lambda I_3 + \mu M$.

$$M^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

S'il existe des réels λ, μ tels que $M^2 = \lambda M + \mu I_3$ alors, en identifiant les coefficients d'indices $(2,2)$ et $(2,3)$, on obtient $\mu = -2$ et $\lambda = 3$. On vérifie que

$$M^2 = 3M - 2I_3.$$

2. Rappeler <u>la définition</u> de la notion de matrice inversible.

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si, il existe une matrice carrée B tel que $AB = BA = I_3$.
Dans ce cas, B est unique notée $B = A^{-1}$.

3. Déduire des deux questions précédentes que M est une matrice inversible et déterminer M^{-1} (<u>sans utiliser d'échelonnement</u>). On explicitera ses 9 coefficients.

On déduit de la première question que $3M - M^2 = 2I_3$ puis que $M\left(\frac{1}{2}(3I_3 - M)\right) = \left(\frac{1}{2}(3I_3 - M)\right)M = I_3$.

Ainsi, par la seconde question M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - M) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcul de M^n à l'aide de suites

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que :

$$M^n = a_n I_3 + b_n M$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition : $\mathscr{P}(n) : \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, \quad M^n = a_n I_3 + b_n M$.

- *$\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet : $M^0 = I_3 = 1.I_3 + 0.M$. Donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.*
Par hypothèse de récurrence, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n I_3 + b_n M$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= M \times (a_n I_3 + b_n M) \\ &= a_n M + b_n(3M - 2I_3) \\ &= (a_n + 3b_n)M - 2b_n I_3. \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = -2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

5. Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1.

Dans la question précédente, on a montré qu'on pouvait choisir $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -2b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n$.
On peut donc choisir $a_1 = -2b_0 = 0$ et $b_1 = a_0 + 3b_0 = 1 + 3.0 = 1$.

6. Montrer que la suite (b_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = a_{n+1} + 3b_{n+1} = 3b_{n+1} - 2b_n$.

7. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n puis a_n en fonction de n.

La suite (b_n) définie par les relations : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$ et $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ est récurrente linéaire d'ordre deux.
L'équation caractéristique associée est $r^2 = 3r - 2$ et a pour racines 1 et 2. Ainsi, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \lambda.1^n + \mu.2^n = \lambda + \mu 2^n.$$

Enfin, on a

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\mu \\ \mu = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array}\right.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2^n - 1$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -2b_n = -2(2^n - 1) = 2 - 2^{n+1}$. Donc, comme $a_0 = 1 = 2 - 2^0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 - 2^n$.

8. En déduire l'expression de M^n. On explicitera ses 9 coefficients.

On sait par les questions 4. et 7. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n I_3 + b_n M$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = (2 - 2^n)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^n - 1)\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Calcul de M^n par introduction d'une matrice auxiliaire

9. On pose : $J = M - 2I_3$. Calculer J^2, J^3 puis J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$J = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$J^2 = J \times J = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -J.$

$J^3 = J \times J^2 = J \times (-J) = -J^2 = -(-J) = J.$
Par récurrence immédiate, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$, $J^k = (-1)^{k-1} J$ et $J^0 = I_3$.

10. En déduire l'expression de M^n. On vérifiera les résultats obtenus à la question précédente.

Indication : commencer par remarquer que $M = 2I_3 + J$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $M = 2I_3 + J$ et que $J \times (2I_3) = (2I_3) \times J$, la formule du binôme de Newton nous assure que :

$$\begin{aligned}
M^n &= (2I_3 + J)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} J^k \\
&= 2^n \binom{n}{0} J^0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} \overbrace{J^k}^{=(-1)^{k-1}J} \\
&= 2^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \right) J \\
&= 2^n I_3 - \left(-2^n + \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k}}^{=(-1+2)^n=1} \right) J \\
&= 2^n I_3 - (1 - 2^n) J \\
&= 2^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^n - 1) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Calcul de M^n par diagonalisation

11. On pose : $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

On a :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \textit{rg}(P) = 3 \textit{ donc } P \textit{ inversible}$$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

L'inverse de P est donc donné par : $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Montrer qu'il existe une unique matrice diagonale D que l'on déterminera telle que : $MP = PD$.

On a : $MP = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$*, on considère la matrice diagonale* $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$*. Ainsi :*

$PD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 3\lambda_3 \end{bmatrix}$ *et*

$$\begin{aligned} MP = PD \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 3\lambda_3 \end{bmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \quad \textit{et} \quad \lambda_2 = 1 \quad \textit{et} \quad \lambda_3 = 2. \end{aligned}$$

Il existe donc une unique matrice diagonale D vérifiant $MP = PD$ qui est $D = \textbf{Diag}(2,1,2)$.

13. Indiquer une autre manière de calculer M^n. On ne demande pas ici d'expliciter les coefficients de M^n, sauf si ceux-ci n'ont pas été explicitées aux questions précédentes.

Indication : commencer par remarquer que $M = PDP^{-1}$.

Comme P est inversible, la relation $MP = PD$ montrée à la question précédente s'écrit $M = PDP^{-1}$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: $M^n = PD^nP^{-1}$.

- *$\mathscr{P}(0)$ est vraie car $M^0 = I_3 = PP^{-1} = PI_3P^{-1} = PD^0P^{-1}$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a*

$$\begin{aligned} M^{n+1} = MM^n &= M(PD^nP^{-1}) \quad \textit{par hypothèse de récurrrence} \\ &= (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} \\ &= PDI_3D^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Par le principe de récurrence la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} & 1-2^n \\ 2^n-1 & 2-2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Partie B : Application à un système de suites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 2^n \\ v_{n+1} = u_n - 2^n \end{cases}$$

14. Soit (w_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.
Donner l'expression de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n$.

15. On note $C_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$. Exprimer C_{n+1} en fonction de M et C_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente $w_n = 2^n$, ainsi

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u_n - 2v_n - w_n \\ u_n - w_n \\ 2w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = MC_n.$$

Donc $C_{n+1} = MC_n$.

16. En déduire C_n en fonction de C_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Préciser alors les expressions de u_n et v_n.

Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = M^n C_0 = M^n \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Donc, en utilisant l'expression de M^n déterminée aux questions précédentes, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = C_n = M^n \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2^{n+1} - 1)u_0 + (2 - 2^{n+1})v_0 + 1 - 2^n \\ (2^n - 1)u_0 + (2 - 2^n)v_0 + 1 - 2^n \\ 2^n \end{bmatrix}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = (2^{n+1} - 1)u_0 + (2 - 2^{n+1})v_0 + 1 - 2^n \quad \textit{et} \quad v_n = (2^n - 1)u_0 + (2 - 2^n)v_0 + 1 - 2^n.$$

Problème n°2 : Analyse

Partie A : Expression d'une fonction réciproque.

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
   On note argth (argument tangente hyperbolique) sa réciproque.

   Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ch ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ donc th est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur cet intervalle.

   Pout tout réel x, $(th)'(x) = \dfrac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = \dfrac{1}{ch^2(x)} > 0$. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   De plus, pour tout x, $th(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1$ et par imparité $\lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = -1$.

   Le théorème de la bijection nous assure que th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $I = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} th(x), \lim\limits_{x \to +\infty} th(x) \right[=]-1, 1[$.

2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.

   Le calcul précédent montre que pour tout réel x, $th'(x) = \dfrac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$.

3. Justifier que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

   Soit y dans I et $x = argth(y)$. La fonction th est dérivable au point x et $th'(x) = 1 - th^2(x) \neq 0$. Donc argth est dérivable en y et $argth'(y) = \dfrac{1}{th'(x)} = \dfrac{1}{1 - th^2(argth(y))} = \dfrac{1}{1 - y^2}$.

4. Traduire en termes d'équations la bijectivité de th.
   Soit $y \in I$, exprimer $\mathrm{argth}(y)$ à l'aide de fonctions usuelles.
   Indication : on résoudra une équation.

   Dire que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1; 1[$, c'est dire que, pour tout $y \in]-1; 1[$, l'équation $y = th(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une unique solution (qui est $argth(y)$). Or, on a

$$\begin{aligned} y = th(x) &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \quad \textit{car } y \in]-1; 1[\textit{ et donc } \frac{1+y}{1-y} > 0 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

   Donc, pour tout $y \in]-1; 1[$, $argth(y) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

Partie B : Etude d'une équation fonctionnelle.

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$(\star) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

5. Déterminer les fonctions constantes vérifiant $(\star)$.

   Si il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x) = C$, f étant solution du problème posé, alors C vérifie $C = \dfrac{2C}{1 + C^2}$ ce qui équivaut à $C(C^2 - 1) = 0$ soit $C = 0$ ou $C = 1$ ou $C = -1$.

6. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f vérifie $(\star)$.

   Si f est solution, $f(0)$ vérifie $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1 + f(0)^2}$ ce qui donne comme à la question précédente $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.

7. Montrer que, si f vérifie $(\star)$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   Indication : on pourra commencer par étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

Une étude de la fonction $t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^2}$ *nous assure que* 1 *et* -1 *sont respectivement le maximum et le minimum sur* $\mathbb{R}$ *de cette fonction. La maximum* 1 *est atteint uniquement en* $t=1$ *et le minimum* -1 *est atteint uniquement en* $t=-1$.

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \dfrac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} \leqslant 1$, *i.e.* $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

8. Montrer que si f vérifie $(\star)$ alors $-f$ vérifie également $(\star)$.

   Supposons que f *soit solution. Alors, pour tout réel* x *:*

$$(-f)(2x) = -f(2x) = -\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$$

   ce qui montre que $-f$ *est aussi solution.*

9. Montrer que th vérifie $(\star)$.

   Pour tout réel x *:*

$$\begin{aligned}\frac{2th(x)}{1+(th(x))^2} &= \frac{2sh(x)ch(x)}{(ch(x))^2+(sh(x))^2} = \frac{2sh(x)ch(x)}{2(ch(x))^2-1}\\ &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2-2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = th(2x)\end{aligned}$$

   ce qui montre que th est solution du problème posé.

Partie C : Résolution de $(\star)$ lorsque f continue en 0. Etude des cas $f(0)=1$ puis $f(0)=-1$.

Dans cette partie, on note f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, <u>continue en 0</u> et vérifiant $(\star)$.

On suppose de plus que $f(0)=1$ et que f n'est pas constante.

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

10. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

    On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$. *Or* f *est continue en 0 donc* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. *Il en résulte que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Pour les trois questions qui suivent, on aura bien en tête les résultats des questions 7. et 8.

11. Etablir une relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier ses variations en fonction du signe de u_0.

    Pour tout entier n, $u_n = f\left(2\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.

    Comme pour tout n, $1+u_{n+1}^2 > 0$, u_{n+1} *et* u_n *ont toujours le même signe donc pour tout entier* n, u_n *a le signe de* u_0.

    D'autre part pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2-1)}{1+u_{n+1}^2}$.

    Puisque pour tout x, $f^2(x) \leqslant 1$, *on en déduit que pour tout* n, $u_{n+1}^2 - 1 \leqslant 0$.

    Ainsi si $u_0 \geqslant 0$, *on a* $u_{n+1} \geqslant 0$ *et la suite* u *est décroissante et si* $u_0 \leqslant 0$, *on a* $u_{n+1} \leqslant 0$ *et la suite* u *est croissante.*

12. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, aboutir à une contradiction.

    Comme $f(x_0) \neq f(0)$, u_0 *appartient à* $[-1,1[$. *Distinguons deux cas :*

    Si u_0 *appartient à* $[-1;0[$, *alors tous les termes de la suite* u *sont négatifs et la suite* u *ne peut converger vers 1.*

    Si u_0 *appartient à* $[0;1[$, *la suite* u *est décroissante et on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_0 < 1$ *ce qui conduit à* $1 < 1$. *Contradiction.*

13. Que peut-on dire si l'on remplace l'hypothèse $f(0)=1$ par $f(0)=-1$?

    Si $f(0)=-1$, *alors* $g=-f$ *est une solution du problème posé qui vérifie* $g(0)=1$ *ce qui est impossible d'après la question précédente.*

14. Que peut-on conclure de l'étude menée dans cette partie ?

    On déduit des questions précédentes qu'il n'existe pas de fonctions non constantes solution du problème posé qui vérifie $f(0)=1$ *ou* $f(0)=-1$.

Partie D : Résolution de $(\star)$ lorsque f dérivable en 0. Etude du cas $f(0)=0$.

Dans cette partie, on note f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, <u>dérivable en 0</u> et vérifiant $(\star)$.

On suppose de plus que $f(0)=0$.

15. En raisonnant par l'absurde et en considérant la même suite que celle de la partie C (en précisant au préalable qui est x_0), montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.

Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$.

Soit w la suite définie par son terme général $w_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

On démontre comme à la question **10.** *(car f dérivable en 0 implique que f continue en 0) que w converge vers $f(0) = 0$.*

Les calculs effectués aux questions **5.**, **6.** *et* **11.** *montre que la suite w est constante égale à $w_0 = 1$ et ne peut donc pas converger vers 0.*

De manière analogue, il est impossible qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = -1$. Ainsi, pour tout réel x, $-1 < f(x) < 1$.

On définit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \text{argth}(f(x))$.

16. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x)$.

Comme pour tout x, $-1 < f(x) < 1$ d'après la question précédente, en utilisant l'expression de argth trouvée au **4.**, *on a pour tout réel x :*

$$g(2x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(2x)}{1-f(2x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^2\right) = 2argth(f(x)) = 2g(x)$$

17. Montrer que g est dérivable en 0.

La fonction f est dérivable en 0. La fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ donc en $f(0) = 0$. Par composition, la fonction g est dérivable en 0.

18. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Soit x réel non nul. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$. Or g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$ donc $\lim\limits_{u\to 0} \frac{g(u)}{u} = g'(0)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = g'(0)$.

19. Montrer que la la suite (v_n) est constante.

Pour tout entier n, $v_n = \dfrac{g\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\frac{x}{2^{n+1}}} = \dfrac{g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}$ car $g(2b) = 2g(b)$ d'après la question **16.**. *La suite v est donc constante égale à $v_0 = \frac{g(x)}{x}$.*

20. En déduire que g est une fonction linéaire (i.e. du type $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$).

Par la question **18.**, *la suite v converge vers $g'(0)$. La question précédente nous assurant que v est constante égale à $\frac{g(x)}{x}$, on a, pour tout réel x non nul, $\frac{g(x)}{x} = g'(0)$ i.e. $g(x) = g'(0)x$ relation qui est encore valable pour $x = 0$: g est donc linéaire.*

Partie E :

21. Conclure quant aux fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en 0 et vérifiant la relation $(\bigstar)$.

Si f est solution du problème posé :

- *Si $f(0) = 1$ d'après la question* **14.**, *f est constante égale à 1.*
- *Si $f(0) = -1$ d'après la question* **14.**, *f est constante égale à -1.*
- *Si $f(0) = 0$ d'après la question* **20.**, *il existe un réel c tel que pour tout réel x, $argth(f(x)) = cx$ ce qui donne $f(x) = th(cx)$. La question* **9.** *assure que les fonctions de ce type sont bien solutions.*

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆