Correction de quelques exercices du TD1

Correction de l'exercice n°6 b)

Enoncé : Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| + |b| \leq |a - b| + |a + b|$.

L'idée est d'utiliser l'inégalité triangulaire et le principe de substitution. On rappelle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On utilise l'inégalité ci-dessus dans le cas où $x = a - b \in \mathbb{R}$ et $y = a + b \in \mathbb{R}$, ce qui nous donne :

$$|(a - b) + (a + b)| \leq |a - b| + |a + b|, \quad \text{i.e.} \quad 2|a| \leq |a - b| + |a + b|. \tag{1}$$

De même, en utilisant l'inégalité triangulaire dans le cas où $x = a + b \in \mathbb{R}$ et $y = a - b \in \mathbb{R}$, on obtient (les rôles de a et b peuvent être permutés)

$$2|b| \leq |a - b| + |a + b|. \tag{2}$$

Ainsi, en sommant membre à membre les inégalités (1) et (2), on trouve :

$$2|a| + 2|b| \leq 2(|a - b| + |a + b|), \quad \text{i.e.} \quad |a| + |b| \leq |a - b| + |a + b|$$

Ce qui conclut cette question.

Correction de l'exercice n°6 c) (la fin)

Enoncé : Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{|a - b|} \geq \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}$.

On a montré en cours que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{3}$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. De manière similaire à ce qui a été réalisé pour démontrer la seconde inégalité triangulaire, on écrit

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \quad \text{grâce à la première inégalité triangulaire}$$

Ensuite, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et comme $|a| \in \mathbb{R}_+$, $|a - b| + |b| \in \mathbb{R}_+$, on obtient que

$$\sqrt{|a|} \leq \sqrt{|a - b| + |b|} \tag{4}$$

On utilise alors l'inégalité (3) dans le cas $x = |a - b| \in \mathbb{R}_+$ et $y = |b| \in \mathbb{R}_+$ ce qui permet d'écrire :

$$\sqrt{|a - b| + |b|} \leq \sqrt{|a - b|} + \sqrt{|b|} \tag{5}$$

En combinant (4) et (5), on obtient par transitivité :

$$\sqrt{|a|} \leq \sqrt{|a - b|} + \sqrt{|b|}$$

Ce qui est équivalent à l'inégalité recherchée : $\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \leq \sqrt{|a - b|}$.
En fait, on pourrait montrer de même que $\sqrt{|b|} - \sqrt{|a|} \leq \sqrt{|a - b|}$, et en déduire l'inégalité :

$$\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a - b|}$$

Correction de l'exercice n°7 b)

Enoncé : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + nx \leq (1+x)^n$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: «$1 + nx \leq (1+x)^n$».

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, $1 + 0x = 1$ et $(1+x)^0 = 1$, donc $1 + 0x \leq (1+x)^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  On a, par hypothèse de récurrence, $1+nx \leq (1+x)^n$. Comme $1+x > 0$, on en déduit que $(1+x)(1+nx) \leq (1+x)^{n+1}$, i.e. $1 + (n+1)x + nx^2 \leq (1+x)^{n+1}$. Enfin, étant donné que $nx^2 \geq 0$, on a

  $$1 + (n+1)x \leq 1 + (n+1)x + nx^2 \leq (1+x)^{n+1}.$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice n°13

- $f_1 : x \mapsto x \ln x - x$. On a $f_1'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$.

  $$f_1'(x) = \ln x.$$

- $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. On a $\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x.x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, ainsi $f_2(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ et $f_2'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{-3}{2x^{\frac{5}{2}}}$.

  $$f_2'(x) = \frac{-3}{2x^{\frac{5}{2}}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

- $f_3 : x \mapsto \dfrac{e^x}{\ln x}$. On a $f_3'(x) = \dfrac{e^x \ln x - e^x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{xe^x \ln x - e^x}{x(\ln x)^2} = \dfrac{e^x(x\ln x - 1)}{x(\ln x)^2}$.

  $$f_3'(x) = \frac{e^x(x\ln x - 1)}{x(\ln x)^2}.$$

- $f_4 : x \mapsto \dfrac{xe^x}{1+\ln x}$.

  On a $f_4'(x) = \dfrac{(e^x + xe^x)(1+\ln x) - xe^x \times \frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \dfrac{e^x((1+x)(1+\ln x) - 1)}{(1+\ln x)^2} = \dfrac{e^x((1+x)\ln x + x)}{(1+\ln x)^2}$.

  $$f_4'(x) = \frac{e^x((1+x)\ln x + x)}{(1+\ln x)^2}.$$

- $f_5 : x \mapsto (x^3+x-2)^4$ est de la forme u^4 où $u : x \mapsto x^3 + x - 2$.

  On a $f_5'(x) = 4 \times (u(x))^3 \times u'(x) = 4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3$.

  $$f_5'(x) = 4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3.$$

- $f_6 : x \mapsto \exp(\sin x)$ est de la forme $\exp(u)$ où $u : x \mapsto \sin x$.

  On a $f_6'(x) = \exp(u(x)) \times u'(x) = \exp(\sin x) \times \cos x$.

  $$f_6'(x) = \exp(\sin x)\cos x.$$

- $f_7 : x \mapsto \ln(1-e^{-x})$ est de la forme $\ln(u)$ où $u : x \mapsto 1 - e^{-x}$.

  On a $f_7'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{-(-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

  $$f_7'(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

- $f_9 : x \mapsto \ln(\ln x)$ est de la forme $\ln(u)$ où $u : x \mapsto \ln x$.
  On a $f_9'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$.
$$f_9'(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$
- $f_{10} : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ est de la forme $\sqrt{u}$ où $u : x \mapsto x^2 - 5x + 6$.
  On a $f_{10}'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$.
$$f_{10}'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}.$$
- $f_{11} : x \mapsto \cos(x^2)\sin(3x)$.
  On a $f_{11}'(x) = -\sin(x^2) \times 2x \times \sin(3x) + \cos(x^2) \times \cos(3x) \times 3 = -2x\sin(x^2)\sin(3x) + 3\cos(x^2)\cos(3x)$.
$$f_{11}'(x) = -2x\sin(x^2)\sin(3x) + 3\cos(x^2)\cos(3x).$$
- $f_{12} : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est de la forme $\sqrt{u}$ où $u : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.
  On a $f_{12}'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{\frac{1\times(1-x)-(1+x)\times(-1))}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.
$$f_{12}'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$
- $f_{13} : x \mapsto \left(\cos^2 x + \dfrac{3}{2}\right) \times \sin(2x)$.
  On a $f_{13}'(x) = (2 \times \cos x \times (-\sin x))\sin(2x) + \left(\cos^2 x + \dfrac{3}{2}\right) \times \cos(2x) \times 2 = -2\sin x \cos x \sin(2x) + 2\cos(2x)\left(\cos^2 x + \dfrac{3}{2}\right)$.
  En utilisant le fait que $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on obtient :
$$\begin{aligned} f_{13}'(x) &= -4\sin^2 x \cos^2 x + 2\left(2\cos^2 x - 1\right)\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right) \\ &= -4\left(1 - \cos^2 x\right)\cos^2 x + 2\left(2\cos^2 x - 1\right)\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right) \\ &= 8\cos^4 x - 3. \end{aligned}$$