Correction de quelques exercices du TD2

Correction de l'exercice n°6 3)

Enoncé : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

En utilisant l'indication, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \quad \text{[car } (k+1)! = (k+1).k!\text{]} \\
&= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{[On a reconnu une somme télescopique]} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice n°6 4)

Enoncé : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

On cherche a et b réels tels que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2}$.

Soit $1 \leq k \leq n$. Comme $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2} = \dfrac{a(k+2)+bk}{k(k+2)} = \dfrac{(a+b)k+2a}{k(k+2)}$.

En choisissant $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$, on a bien : $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1/2}{k} + \dfrac{-1/2}{k+2}$, ou encore $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \quad \text{[par ce qui précéde]} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}\right) \quad \text{[par linéarité]} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j}\right) \quad \text{[par changement d'indice } k+2=j\text{]} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \sum_{j=3}^{n} \frac{1}{j}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \sum_{j=3}^{n} \frac{1}{j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \quad \text{[après mise au même dénominateur et factorisation]}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice n°7

Enoncé : Soient $k \leq p \leq n$. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$ et en déduire l'expression de $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

On a d'une part :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!((n-k)-(p-k))!} \\ &= \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p}\binom{p}{k} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!k!(p-k)!} \\ &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}\end{aligned}$$

D'où l'égalité.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k} \\ &= \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} \quad \text{[par linéarité car le terme } \binom{n}{p} \text{ ne dépend par de } k\text{]} \\ &= \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}1^k 1^{p-k} \quad \text{[on reconnaît un binôme]} \\ &= \binom{n}{p}(1+1)^p \\ &= 2^p\binom{n}{p}\end{aligned}$$

Correction de la fin de l'exercice n°8 2. b)

Enoncé : Déterminer la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

On a montré en cours que $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} \overset{(\star)}{=} n(n-1)2^{n-2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \overset{(\star\star)}{=} n2^{n-1}$.

A partie de la relation $(\star)$, on obtient par linéarité :

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} - \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k},$$

d'où, grâce à $(\star\star)$: $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.