Correction de quelques exercices du TD3

Correction de l'exercice n°3 3)b)

Enoncé : Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\quad x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Par définition, cette équation se réécrit $\exp\left(\sqrt{x}\ln(x)\right) = \exp\left(x\ln(\sqrt{x})\right)$.

<u>Ensemble de résolution :</u> Les termes de l'équations sont bien définies à condition que $x > 0$.
L'ensemble de résolution est donc $\mathbb{R}_+^\star$.

<u>Résolution :</u> Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sqrt{x}\ln(x)\right) = \exp\left(x\ln(\sqrt{x})\right) &\iff \exp\left(\sqrt{x}\ln(x)\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\ln(x)\right)\\
&\iff \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x)\\
&\iff \sqrt{x}\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(x) = 0\\
&\iff \sqrt{x}\ln(x)\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0\\
&\iff \left[\sqrt{x} = 0 \quad \text{OU} \quad \ln(x) = 0 \quad \text{OU} \quad 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 0\right]\\
&\iff \left[x = 0 \quad \text{OU} \quad x = 1 \quad \text{OU} \quad x = 4\right].
\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> Etant donné que l'ensemble de résolution est $\mathbb{R}_+^\star$, l'ensemble des solutions est $\{1; 4\}$.

Correction de l'exercice n°5

Enoncé : On considère la fonction $f : x \mapsto (\sqrt{x})^x$.

1. Faire l'étude complète de f.

Par définition, l'expression de f peut se réécrire : $f(x) = \exp\left(x\ln(\sqrt{x})\right)$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et, par composition, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\ln(x)\right)$, d'où $f'(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{x}{2} \times \frac{1}{x}\right]\exp\left(\frac{x}{2}\ln(x)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \ln(x)\right)\exp\left(\frac{x}{2}\ln(x)\right)$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 + \ln(x)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\quad 0 \leq 1 + \ln(x) \iff \frac{1}{e} \leq x$, et $f'(x)$ s'annule uniquement en $x = \frac{1}{e}$.
On en déduit le tableau de variation :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ 1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{x}{2}\ln(x)\right) = +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{x}{2}\ln(x)\right) = \exp(0) = 1$

car $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée.

2. Le plus petit réel a tel que tout $y \geq a$ possède **au moins** un antécédent par f est $a = \exp\left(-\dfrac{1}{2e}\right)$.

3. Le plus petit réel b tel que tout $y \geq b$ possède **exactement** un antécédent par f est $b = 1$.

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

Le théorème de la bijection nous assure que :

- $\star$ f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
  La fonction réciproque associée à cette bijection est $g \overset{\text{déf.}}{=} \left(f_{|_{[1;+\infty[}}\right)^{-1}$.
- $\star$ De plus $g : [a; +\infty[\to [1; +\infty[$ est continue strictement croissante sur $[a; +\infty[$.

Enfin la fonction $f_{|_{[1;+\infty[}}$ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

Le théorème de dérivabilité de la réciproque nous assure que :

- $\star$ g est dérivable sur $[a; +\infty[\setminus \{f(1)\} = [a; +\infty[\setminus \{a\} =]a; +\infty[$.

Représentation graphique :