Corrections du travail des vacances de Pâques

Exercice n°1 :

1) (a) La fonction g est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ (somme de réels strictement positifs). On en déduit :

x	0		$+\infty$
g	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

- $g(x) = x^2 + \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
- $g(x) = x^2 + \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Le Théorème de la bijection continue nous assure que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $g(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in g(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$ par g. L'équation $g(x) = 0$ a donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On a : • $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln 2$

et $\frac{1}{4} - \ln 2 < 0{,}25 - 0{,}69 = -0{,}46 < 0$.

• $g(1) = 1^2 + \ln(1) = 1 > 0$

Exercice n°1 :

1) (a) La fonction g est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ (somme de réels strictement positifs). On en déduit :

x	0	$+\infty$
g	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

- $g(x) = x^2 + \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
- $g(x) = x^2 + \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Le Théorème de la bijection continue nous assure que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $g(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.
Comme $0 \in g(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$ par g. L'équation $g(x) = 0$ a donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On a :
- $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \ln 2$
  et $\dfrac{1}{4} - \ln 2 < 0{,}25 - 0{,}69 = -0{,}46 < 0$.
- $g(1) = 1^2 + \ln(1) = 1 > 0$

Comme g est continue sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, le Théorème des valeurs intermédiaires nous assure que l'équation $g(x) = 0$ possède une solution sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Or α est l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$, cette solution ne peut être que α.

Donc $\underbrace{\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]}$.

2) a)

```
import numpy as np
def g(x) :
    y = x**2 + np.log(x)
    return y
def dichotomie(a, b, eps) :
    u=a
    v=b
    while abs(v-u)>eps :
        c=(u+v)/2
        if g(u)*g(c)>0 :
            u=c
        else :
            v=c
    return [u, v]
```

b) En appliquant ce programme, on trouve l'encadrement :

$$\underbrace{0{,}65291 < \alpha < 0{,}65292}$$

ces deux valeurs sont des approximation de α à 10^{-5} près.

3) a) La fonction f est dérivable sur $I = [1/2 ; 1]$ comme somme de fonctions dérivables sur I. De plus :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4x} = \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x^2+4x-1$.

Le trinôme $-2x^2+4x-1$ a pour discriminant $4^2 - 4\times(-2)\times(-1) = 8 > 0$ et a donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{-4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$$

$$x_2 = \frac{-4+\sqrt{8}}{-4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{or } \sqrt{2} > 1{,}4$$

donc $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0{,}3 < \frac{1}{2}$.

Comme le trinôme $-2x^2+4x-1$ est strictement positif sur $]x_1 ; x_2[\supset I$, on en déduit que $f'(x) > 0$ sur I.

Donc f strictement croissante sur I.

De plus, si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ alors, par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{2} ; 1]$, on a : $f(\frac{1}{2}) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$.

Comme
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(\ln(2) - \frac{1}{4}\right)}_{>0} \quad \left(\begin{array}{l}\text{avec } \ln(2) > 0{,}69 \\ \text{et } \ln(2) - \frac{1}{4} > 0{,}44\end{array}\right)$$

on a : $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

Comme
$$f(1) = 1 - \frac{1}{4}1^2 - \frac{1}{4}\ln(1)$$
$$= \frac{3}{4} < 1$$

on a : $f(1) < 1$

Donc : $\forall x \in I, \quad f(x) \in [1/2\,;1]$.

b)(i) On a : $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{3}{4}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \in I$".

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $u_0 = 1$, donc $u_0 \in I$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par hypothèse : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. Par croissance de f sur $[\frac{1}{2}; 1]$, on a : $f(\frac{1}{2}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$

  ie $\frac{1}{2} < f(\frac{1}{2}) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(1) < 1$. D'où $u_{n+1} \in I$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_{n+1} \leqslant u_n$".

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{4}$ et donc $u_1 \leqslant u_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par hypothèse $u_{n+1} \leqslant u_n$. De plus, la question précédente nous assure que $u_n, u_{n+1} \in I$. Comme f est croissante sur I, on a : $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ ie $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) est décroissante.

(iii) La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, le Théorème de la limite monotone nous assure que (u_n) converge vers un réel $\ell \in [\frac{1}{2};1]$ (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$).

La fonction f étant continue sur I, on a :

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$$

et, d'autre part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Donc, en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $\ell = f(\ell)$ ie $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell^2 - \frac{1}{4}\ln(\ell)$ ou encore $\ell^2 + \ln(\ell) = g(\ell) = 0$. Le réel α étant l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = 0$, on obtient que $\underline{\ell = \alpha}$.

Conclusion : $\underline{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

c) La fonction $f' : x \longmapsto 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1-2x^2}{4x^2}.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $1-2x^2$, donné sur $\mathbb{R}$ par :

$\sqrt{2} < 1{,}5$

ainsi $\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} < 0{,}75 < 1}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
signe de $1-2x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	

on en déduit :

x	0		$\sqrt{2}/2$		1
f'	‖		$f'(\frac{\sqrt{2}}{2})$		
	‖ $1/4$	↗		↘	$1/4$

où $f'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

d) Grâce au tableau de variation précédent, on a :

$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

ainsi : $\underbrace{\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant q \quad \text{avec } q = \frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

De plus : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, donc $0,25 < \frac{2-\sqrt{2}}{2} < 0,3$

et $\underbrace{0 < 0,25 < q < 0,3 < 1}$.

e) La fonction f est dérivable sur I et : $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant q$

L'inégalité des accroissements finis nous assure que :

$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant q\,|x-y| \quad (*)$

De plus, la question b)(i) nous assure que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

et on sait que, voir question 1), $f(\alpha) = \alpha \in I$.

Donc, en appliquant $(*)$ $(x = u_n$ et $y = \alpha)$, on trouve :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant q\,|u_n - \alpha|$

ie $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant q\,|u_n - \alpha|}$.

f) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{q^n}{2}$ "

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et $u_0 = 1$

  donc $0 < u_0 - \alpha < \frac{1}{2} = \frac{q^0}{2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par hypothèse, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{q^n}{2}$ et par la question précédente :

  $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant q\,|u_n - \alpha|$.

On en déduit que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant q\,|u_n - \alpha| \leqslant q\left(\frac{q^n}{2}\right) \leqslant \frac{q^{n+1}}{2}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.

• Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g) Comme $0<q<1$, on a : $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Le Théorème d'encadrement nous assure que $|u_n - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ie $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

h) (i)

```
def suite(n):
    u = 1
    for i in range(1, n+1):
        u = u - (1/4)*u**2 - (1/4)*np.log(u)
    return u
```

(ii)

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n = 0
    while ((2-np.sqrt(2))/2)**n > espsilon:
        n = n+1
    return suite(n)
```

(iii) En appliquant ce programme, on trouve $\alpha \simeq 0{,}652920$.

Exercice n°2 (Ecricome 2024)

Partie I

1) (a) $(M+I_3)^2 = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^2 = 3\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} = 3(M+I_3)$.

Ainsi $M^2+2M+I_3 = 3M+3I_3$ ie $M^2-M=2I_3$

ou encore : $\left(\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}I_3\right)M = I_3$. Il existe donc une matrice $B=\frac{1}{2}(M-I_3)\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $BM=I_3$. Par conséquent, M est inversible et $M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I_3)$.

On obtient : $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

(b) On a : $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\times1+(-1)\times(-2)+0\times1 & 0 & 0\\ 1\times1+(-1)\times1+0\times(-2) & 3 & 0\\ 1\times1+(-1)\times1+0\times1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix} = I_3$

Donc P est inversible et

$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{bmatrix}$

(c) On a : $D=P^{-1}MP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

(d) Montrons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: "$M^k=PD^kP^{-1}$"

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3=M^0$.
- Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

  On a : $D=P^{-1}MP \iff M=PDP^{-1}$. Ainsi :

  $M^{k+1} = M\times M^k = (PDP^{-1})(PD^kP^{-1})$ [par hypothèse de récurrence]

  $= PDD^kP^{-1}$

  $= PD^{k+1}P^{-1}$ $\quad\mathcal{P}(k+1)$ est vraie
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$.

(e) Soit $k\in\mathbb{N}$. Par 1)(d), on a : $M^k=PD^kP^{-1}$. Ainsi 1)(c) donne :

$M^k = P\begin{bmatrix}(-1)^k&0&0\\0&(-1)^k&0\\0&0&2^k\end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2(-1)^k+2^k & -(-1)^k+2^k & -(-1)^k+2^k\\ -(-1)^k+2^k & 2(-1)^k+2^k & -(-1)^k+2^k\\ -(-1)^k+2^k & -(-1)^k+2^k & 2(-1)^k+2^k\end{bmatrix}$

$= \frac{2(-1)^k+2^k}{3}I_3 + \frac{2^k-(-1)^k}{3}M$

$\boxed{a_k = \frac{2^k-(-1)^k}{3} \qquad b_k = \frac{2(-1)^k+2^k}{3}}$

2) (a) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, la propriété $P(k)$: " $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$ "

- $P(1)$ vraie car $n^{1-1} J_n = n^0 J_n = J_n$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Supposons $P(k)$ et montrons $P(k+1)$.

On a : $(J_n)^{k+1} = J_n^k \times J_n = n^{k-1} (J_n)^2$ [par hypothèse de récurrence].

Or : les coefficients de $(J_n)^2$ sont tous identiques égaux à : $\sum_{i=1}^{n} 1 \times 1 = n$,

et on a : $(J_n)^2 = n J_n$. Donc $(J_n)^{k+1} = n^{k-1} (n J_n) = n^k J_n$.

D'où $P(k+1)$ vraie.

- Par le principe de récurrence $P(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

(b) On a : $M_n = J_n - I_n$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a : $J_n \times (-I_n) = (-I_n) \times J_n$ (J_n et $-I_n$ commutent), par conséquent, la formule du Binôme de Newton nous assure que :

$$M_n^k = (J_n + (-I_n))^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i}\right] + \binom{k}{0} J_n^0 (-I_n)^{k-0}$$

$$= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left[n^{i-1} J_n\right] \left[(-1)^{k-i} I_n\right]$$

[car $J_n^i = n^{i-1} J_n$ pour $i \geq 1$ par 2) (a)]

$$= (-1)^k I_n + \left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}\right] J_n$$

On a : $M_n^k = c_k J_n + (-1)^k I_n$ avec $c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

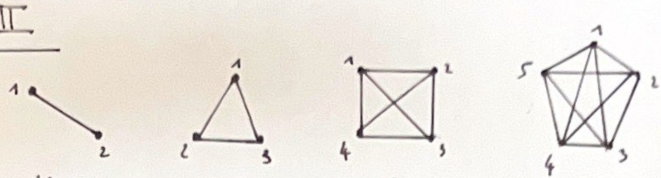
$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} = n^{-1} \left(\left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i}\right] - (-1)^k \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} = c_k$$

(e) En combinant les résultats obtenus aux questions 2)(c) et (d), on obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, les coefficients diagonaux de $(M_n)^k$ sont tous égaux à $(-1)^k + c_k = (-1)^k + \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}$ et les coefficients extra-diagonaux de $(M_n)^k$ sont égaux à $c_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}$.

Partie II

3)



K_2 K_3 K_4 K_5

4) (a) La matrice d'adjacence de K_n est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient (i,j) ($i,j \in [\![1,n]\!]$) est 1 si i est relié à j et 0 sinon. C'est la matrice carrée d'ordre n ayant des coefficients diagonaux tous égaux à 0 et des coefficients extra-diagonaux tous égaux à 1. La matrice d'adjacence de K_n est M_n.

(b) On cherche la valeur du coefficient $(1,1)$ de la matrice $(M_4)^4$. Par 2)(e) on a : $\left[(M_4)^4\right]_{1,1} = (-1)^4 + \frac{(4-1)^4 - (-1)^4}{4} = 1 + \frac{3^4 - 1}{4} = 21$.
Dans K_4 il y a 21 chaînes de longueur 4 reliant le sommet 1 à lui-même.

5) Tout sommet de K_n est relié à tous les autres sauf lui-même, son degré est donc $n-1$.

6) La formule d'Euler nous assure que la somme des degrés des sommets du graphe K_n est égal à deux fois le nombre d'arêtes de K_n. Etant donné que les n sommets de K_n sont de degré $n-1$, on obtient :

$$2 \times (\text{nombre d'arêtes de } K_n) = n \times (n-1).$$

Autrement dit, le nombre d'arêtes de K_n est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Partie III

7) A l'état initial, on se trouve sur le sommet 1, donc : $\underline{X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$.

8) La probabilité conditionnelle $P_{S_k^i}(S_{k+1}^j)$ est la probabilité, sachant qu'on était sur le sommet i à l'instant k, d'être sur le sommet j à l'instant k+1. Il y a donc deux cas possibles :

* Soit $j = i$: $P_{S_k^i}(S_{k+1}^i) = 0$ car aucune arête ne relie un sommet à lui-même ;

* Soit $j \neq i$: $P_{S_k^i}(S_{k+1}^j) = \frac{1}{n-1}$ car il y a équiprobabilité dans le choix du sommet parmi les n-1 autres sommets disponibles (le degré de i étant n-1, ces sommets sont bien "accessibles").

9) En appliquant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{S_k^1, S_k^2, \dots, S_k^n\}$, on obtient :

$$s_{k+1}^i = P(S_{k+1}^i) = \sum_{j=1}^{n} P(S_{k+1}^i \cap S_k^j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} P(S_k^j)\, P_{S_k^j}(S_{k+1}^i)$$
$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{n-1} P(S_k^j) \quad [\text{par } 8)]$$
$$= \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} s_k^j$$

10) On a : $\underline{A = \frac{1}{n-1} M_n}$ par 9)

11) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: " $X_k = \frac{1}{(n-1)^k}(M_n)^k X_0$ "

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $\frac{1}{(n-1)^0}(M_n)^0 X_0 = I_n X_0 = X_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

  Or a, par 10), $X_{k+1} = \frac{1}{n-1} M_n X_k$, puis par hypothèse de récurrence :

  $X_{k+1} = \frac{1}{n-1} M_n \left(\frac{1}{(n-1)^k}(M_n)^k X_0\right) = \frac{1}{(n-1)^{k+1}} \cdot M_n^{k+1} X_0$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ vraie.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$.

12) En combinant les résultats des questions 11), 7) et 2)(c), on trouve que X_k est la première colonne de la matrice $\frac{1}{(n-1)^k}(M_n)^k$ ie :

$$X_k = \frac{1}{(n-1)^k} \begin{bmatrix} \frac{(n-1)^k-(-1)^k}{n} + (-1)^k \\ \frac{(n-1)^k-(-1)^k}{n} \\ \vdots \\ \frac{(n-1)^k-(-1)^k}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} - \frac{(-1)^k}{n(n-1)^k} + \frac{(-1)^k}{(n-1)^k} \\ \frac{1}{n} - \frac{(-1)^k}{n(n-1)^k} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} - \frac{(-1)^k}{n(n-1)^k} \end{bmatrix}$$

13) On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_k^i = P(S_k^i) = (X_k)_i$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{(-1)^k}{n(n-1)^k} + \frac{(-1)^k}{(n-1)^k} & \text{si } i=0 \\ \frac{1}{n} - \frac{(-1)^k}{n(n-1)^k} & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas : $s_k^i \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{1}{n}$