Correction du travail supplémentaire des vacances de Pâques

Exercice n°1 : (Ecricome 2005)

Partie I :

1) L'équation $x^2 - qx - pq = 0$ a pour discriminant $(-q)^2 - 4 \times (-pq) = 4pq + q^2 > 0$.
Elle possède deux racines distinctes : $r_1 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}$
et, de plus, $r_1 < r_2$.

2) Comme r_1 et r_2 sont les racines du polynôme $x^2 - qx - pq$, on sait qu'il se factorise sous la forme : $x^2 - qx - pq = (x - r_1)(x - r_2)$, ainsi :
$x^2 - qx - pq = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$ et, par identification : $\begin{cases} q = r_1 + r_2 \\ -pq = r_1 r_2 \end{cases}$

3) On a : $f(1) = 1 - q - pq = 1 - (1-p) - pq$
$= p(1-q)$
$= p^2 > 0$

$f(0) = -pq < 0$ et $f(-1) = 1 + q - pq$
$= 1 + q(1-p) = 1 + q^2 > 0$

4) La fonction f est continue (car polynomiale) sur chacun des intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$. Comme $f(-1) > 0$ et $f(0) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur $]-1, 0[$. De même, comme $f(1) > 0$ et $f(0) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur $]0; 1[$.
Comme l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ par 1) r_1 et r_2 et que $r_1 < r_2$, on a nécessairement $r_1 \in]-1, 0[$ et $r_2 \in]0, 1[$.
Autrement dit : $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$.

5) On a : $|r_2| - |r_1| = r_2 - (-r_1)$ (car $r_1 < 0$). D'autre part $0 < |r_1| < 1$ et $0 < |r_2| < 1$
$= r_2 + r_1 = q > 0$ (par 2)) par 4), donc :
$0 < |r_1| < |r_2| < 1$

Partie II

6) $a_1 = P(A_1) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)\, P(P_2)$ [par indépendance]

$= p^2$

$a_2 = P(A_2) = P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = P(F_1) P(P_2) P(P_3)$ [par indépendance]

$= q p^2$

$a_3 = P(A_3) = P((F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4))$

$= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$ [par incompatibilité]

$= P(F_1) P(F_2) P(P_3) P(P_4) + P(P_1) P(F_2) P(P_3) P(P_4)$ [par indépendance]

$= q^2 p^2 + q p^3 = q p^2 (q + p) = q p^2$

7) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{ F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2 \}$, on obtient :

$P(A_{n+2}) = P(A_{n+2} \cap F_1) + P(A_{n+2} \cap P_1 \cap F_2) + P(A_{n+2} \cap P_1 \cap P_2)$.

Comme $n \geqslant 0$, on a $n+2 \geqslant 2$ et donc $A_{n+2} \cap P_1 \cap P_2 = A_{n+2} \cap A_1 = \emptyset$ car les événements A_i sont deux à deux incompatibles. On obtient que :

$P(A_{n+2} \cap P_1 \cap P_2) = 0$, d'où :

$a_{n+2} = P(F_1)\, P_{F_1}(A_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2)\, P_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2})$ [$P(F_1) = q \neq 0$ et $P(P_1 \cap F_2) = pq \neq 0$]

En fin :
- Si on obtient face au premier tirage, l'événement A_{n+2} sera réalisé à condition de réaliser A_{n+1} lors des $(n+1)$ essais suivants. On a donc : $P_{F_1}(A_{n+2}) = P(A_{n+1})$
- Si on obtient pile au premier tirage, puis face au second, l'événement A_{n+2} sera réalisé à condition de réaliser A_n lors des n essais suivants. On a donc $P_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) = P(A_n)$

On obtient donc : $\underline{a_{n+2} = q\,a_{n+1} + pq\,a_n}$.

8)
```
def suite(n, p, q):
    a0 = 0
    a1 = p**2
    for k in range(n):
        aux = a0
        a0 = a1
        a1 = q*a0 + p*q*aux
    return a0
```

9) La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est linéaire récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $f(x)=0$ et les racines associées sont r_1 et r_2 par 1).

Ainsi : il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

De plus : $\begin{cases} a_0 = \lambda + \mu \\ a_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = p^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu(r_2 - r_1) = p^2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = -\dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \\ \mu = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \end{cases}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right]}$

10) Par 5), $0 < |r_1| < |r_2| < 1$, donc $r_1^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $r_2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc : $\underline{a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

Partie III

11) $X_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q a_{n+1} + pq a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & pq \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & pq \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_n$.

Or, par 2), $q = r_1 + r_2$ et $-pq = r_1 r_2$, donc $\underline{X_{n+1} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_n = A X_n}$.

12) $A - r_1 I = \begin{bmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{bmatrix}$.

On a : $(A - r_1 I)\begin{bmatrix} r_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 r_1 - r_1 r_2 \times 1 \\ 1 \times r_1 - r_1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{2,1}$ et $\begin{bmatrix} r_1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0_{2,1}$

Donc $\underline{A - r_1 I \text{ n'est pas inversible.}}$ (on aurait pu voir que $\det(A - r_1 I) = 0$)

$A - r_2 I = \begin{bmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_2 \end{bmatrix}$

On a : $(A - r_2 I)\begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{2,1}$ et $\begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0_{2,1}$

Donc $\underline{A - r_2 I \text{ n'est pas inversible}}$

13) On a $\det P = r_1 \times 1 - 1 \times r_2 = r_1 - r_2 \neq 0$ (car $r_1 < r_2$).

Donc $\underline{P \text{ est inversible}}$ et $\underline{P^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2}\begin{bmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{bmatrix}}$.

14) Après calculs : $\underline{D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}}$.

15) Récurrence classique.

16) Récurrence classique.

17) Soit $n \in \mathbb{N}$. Après calculs : $P D^n P^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2}\begin{bmatrix} r_1^{n+1} - r_2^{n+1} & r_1 r_2^{n+1} - r_2 r_1^{n+1} \\ r_1^n - r_2^n & r_1 r_2^n - r_2 r_1^n \end{bmatrix}$.

D'où, par 16),
$$X_n = P D^n P^{-1} X_0 = P D^n P^{-1}\begin{bmatrix} p^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\begin{bmatrix} r_1^{n+1} - r_2^{n+1} \\ r_1^n - r_2^n \end{bmatrix}$$

Par conséquent : $\underline{a_n = (X_n)_{2,1} = \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)}$.

Exercice préliminaire

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geq p}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: " Pour tous $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, $\left|\sum_{i=p}^{n} u_i\right| \leq \sum_{i=p}^{n} |u_i|$ ".

- $\mathcal{P}(p)$ vraie car $\left|\sum_{i=p}^{p} u_i\right| = |u_p| = \sum_{i=p}^{p} |u_i|$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq p}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) + u_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right| + |u_{n+1}|$$ par inégalité triangulaire. Or $\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|$ par hypothèse de récurrence, donc, par transitivité, $\left|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|\right) + |u_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |u_i|$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°2

1) La fonction nulle, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, est K-contractante.

En effet : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| = 0 \leq K|x-y|$.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|$

Or $K|x-x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, donc, par le théorème d'encadrement

$$|f(x) - f(x_0)| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad \text{ie} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La fonction <u>f est donc continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et, par conséquent, continue sur $\mathbb{R}$.</u>

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que l'équation $f(x) = x$ possède au moins deux solutions <u>distinctes</u> α et β. On a alors $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

Comme f est K-contractante, on a : $|f(\alpha)-f(\beta)| \leqslant K|\alpha-\beta|$

i.e. $|\alpha-\beta| \leqslant K|\alpha-\beta|$ puis $(1-K)|\alpha-\beta| \leqslant 0$. Comme $K \in]0;1[$, $1-K>0$ et $|\alpha-\beta|>0$ (car $\alpha \neq \beta$ par hypothèse), d'où $(1-K)|\alpha-\beta|>0$. Il y a contradiction et nécessairement l'équation $f(x)=x$ possède au plus une solution.

4) (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$\mathcal{P}(n)$: " $|u_{n+1}-u_n| \leqslant K^n |u_1-u_0|$ "

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $|u_1-u_0| = K^0|u_1-u_0|$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Comme f est K-contractante, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

Ainsi : $|f(u_{n+1})-f(u_n)| \leqslant K|u_{n+1}-u_n|$ i.e. $|u_{n+2}-u_{n+1}| \leqslant K|u_{n+1}-u_n|$.

Or, par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1}-u_n| \leqslant K^n|u_1-u_0|$, donc $K|u_{n+1}-u_n| \leqslant K^{n+1}|u_1-u_0|$ et par transitivité, on obtient :

$$|u_{n+2}-u_{n+1}| \leqslant K^{n+1}|u_1-u_0|.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par 4)(a), on a : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $|u_{i+1}-u_i| \leqslant K^i|u_1-u_0|$.

En sommant membre à membre ces inégalités, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}|u_{i+1}-u_i| &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{n}K^i\right)|u_1-u_0| \\ &\leqslant \frac{1-K^{n+1}}{1-K}|u_1-u_0| \\ &\leqslant \frac{1}{1-K}|u_1-u_0| \quad (\text{car } 1-K^{n+1} \leqslant 1).\end{aligned}$$

(c) On montre que $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument ie que $\sum_{n\geqslant 0}|u_{n+1}-u_n|$ converge. Soit $n\in\mathbb{N}$, la somme partielle d'ordre n est $S_n=\sum_{i=0}^{n}|u_{i+1}-u_i|$. La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par 4)(b), et $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante car somme de termes positifs. Par conséquent, le théorème de la limite monotone nous assure que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. Autrement dit $\sum_{n\geqslant 0}|u_{n+1}-u_n|$ converge et donc $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument et donc converge.

Soit $n\in\mathbb{N}^{\geqslant 1}$. On a : $\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)=u_n-u_0$

et donc $u_n=u_0+\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)$. Comme $\left(\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente, il en est de même pour la suite (u_n).

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On note $a=\lim_{n\to+\infty}u_n$.

(d) Par 2) la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi : $\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=f(a)$.

Comme : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$, on obtient par passage à la limite que $a=f(a)$. Autrement dit a est une solution de l'équation $f(x)=x$.

Par 3), a est l'unique solution de $f(x)=x$.

5) (a) Par 4)(a), on a : $\forall i\in[\![n,n+p-1]\!]$, $|u_{i+1}-u_i|\leqslant K^i|u_1-u_0|$.

En sommant membre à membre ces inégalités, on trouve :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1}|u_{i+1}-u_i|\leqslant\sum_{i=n}^{n+p-1}K^i|u_1-u_0|.$$

(b) Par l'inégalité triangulaire généralisée, on a :

$$|u_{n+p}-u_n|\underbrace{=}_{\text{(somme télescopique)}}\left|\sum_{i=n}^{n+p-1}(u_{i+1}-u_i)\right|\underbrace{\leqslant}_{\text{(inégalité triangulaire)}}\sum_{i=n}^{n+p-1}|u_{i+1}-u_i|.$$

(c) En combinant les deux inégalités (des questions **5**(a) et (b)) précédentes, on obtient par transitivité :

$$\underline{|u_{n+p}-u_n| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1}-u_i|} \leqslant \left(\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i\right)|u_1-u_0|$$

$$\leqslant K^n \frac{1-K^{(n+p-1)-n+1}}{1-K}|u_1-u_0|$$

$$\leqslant K^n \frac{1-K^p}{1-K}|u_1-u_0|$$

(d) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}, \ |u_{n+p}-u_n| \leqslant K^n \frac{1-K^p}{1-K}|u_1-u_0|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ <u>fixé</u>. La suite $(u_{n+p})_{p\geqslant 1}$ est extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par conséquent $u_{n+p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} a$. De plus, $K \in]0;1[$, donc $K^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. En passant à la limite, lorsque $p \to +\infty$, dans l'inégalité ci-dessus (à n fixé), on obtient :

$$|a-u_n| \leqslant K^n \frac{1}{1-K}|u_1-u_0|.$$

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n-a| \leqslant \dfrac{K^n}{1-K}|u_1-u_0|.$

---

6) (a) La fonction $t \longmapsto 1+e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas ($\forall t \in \mathbb{R}, \ 1+e^t > 1 > 0$).

De plus : $\forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) = \dfrac{-e^t}{(1+e^t)^2}$.

De même f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ où le dénominateur ne s'annule pas

De plus : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = \dfrac{-e^t(1+e^t)^2 + e^t(2e^t(1+e^t))}{(1+e^t)^4}$

$$= \frac{e^t\,(e^t-1)}{(1+e^t)^4}$$

(b) Le signe de $f''(t)$ est le signe de $e^t - 1$ $\left(\text{car } \forall t \in \mathbb{R}, \ \dfrac{e^t}{(1+e^t)^4} > 0\right)$.
Ainsi $f''(t)$ est strictement négatif sur $]-\infty\,;0[$, nulle en 0 et strictement positif sur $]0\,;+\infty[$. Donc f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et admet un minimum en $x=0$.

Par conséquent : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) \geqslant f'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

Comme : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = -\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} < 0$, on déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{4} \leqslant f'(t) < 0.$$

On en déduit que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

(c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}, \ |f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
L'inégalité des accroissements finis nous assure que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x-y|.$$

Autrement dit f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

(d) Par 4)(c), 4)(d), la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

est convergente. Elle converge vers a l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$.

(e)
```
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1,n+1):
        u = 1/(1+exp(u))
    return u
```

(f) Par 5) (d), on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant \dfrac{(1/4)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \dfrac{2}{3 \times 4^n}$

Si n vérifie $4^n \geqslant \dfrac{2000}{3}$, on aura : $\dfrac{3 \times 4^n}{2} \geqslant 1000$

puis $\dfrac{2}{3 \times 4^n} \leqslant 10^{-3}$ et donc, par transitivité, $|u_n - a| \leqslant 10^{-3}$.

(g)
```
def approx(eps):
        n = 0
        while 2/(3*4**n) > eps:
                n = n+1
        return suite(n)
```