Fonctions exponentielle et logarithme népérien

1) Fonction exponentielle

Définition : La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable f sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note exp.

- *Dérivée :* exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)}$
- *Monotonie :* $\boxed{\text{exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$
- *Signe :* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 0}$
- *Valeurs remarquables :* $\boxed{\exp(0) = 1}$ et $\exp(1) = e \approx 2.718$

Théorème $\boxed{\textit{somme}\rightarrow\textit{produit :} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$

Notation : On note : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$

On en déduit que :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ e^{nx} = (e^x)^n$
- *Tableau de variation (et limites)*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp	0	1	$+\infty$

La fonction exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$

On en déduit que :

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) < \exp(y) \iff x < y$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \leq \exp(y) \iff x \leq y$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \exp(y) \iff x = y$

2) Fonction logarithme népérien

Définition : La fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exp. Ainsi, ln est bijective de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.

- *Dérivée :* ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$
- *Monotonie :* $\boxed{\text{ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^\star}$
- *Valeurs remarquables :* $\boxed{\ln(1) = 0}$ et $\boxed{\ln(e) = 1}$

Théorème $\boxed{\textit{produit}\rightarrow\textit{somme :} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$

On en déduit que :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$
- *Tableau de variation (et limites)*

x	0	1	$+\infty$
ln	$\Vert$ $-\infty$	0	$+\infty$

La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$

On en déduit que :

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) < \ln(y) \iff x < y$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) \leq \ln(y) \iff x \leq y$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) = \ln(y) \iff x = y$

3) Réciprocité et représentation graphique

Théorème : Les fonctions exp étant réciproque l'une de l'autre, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \exp(x) = y \Longleftrightarrow x = \ln(y)}$$

En particulier :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exp(\ln(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x}$$

- *Représentations graphiques de* ln *et* exp