

Fonctions exponentielle et logarithme népérien

1) Fonction exponentielle

Définition : La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable f sur \mathbb{R} vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note \exp .

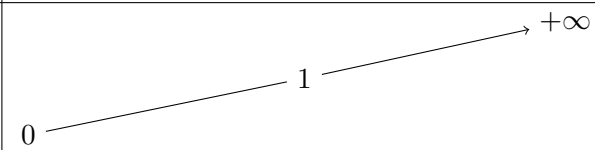
- *Dérivée :* \exp est définie et dérivable sur \mathbb{R} : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$
- *Monotonie :* \exp est strictement croissante sur \mathbb{R}
- *Signe :* $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- *Valeurs remarquables :* $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e \approx 2.718$

Théorème *somme \rightarrow produit :* $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$

Notation : On note : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$

On en déduit que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{nx} = (e^x)^n$
- *Tableau de variation (et limites)*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
\exp			

La fonction \exp est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^*

On en déduit que :

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, \exp(x) < \exp(y) \iff x < y$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, \exp(x) \leq \exp(y) \iff x \leq y$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, \exp(x) = \exp(y) \iff x = y$

2) Fonction logarithme népérien

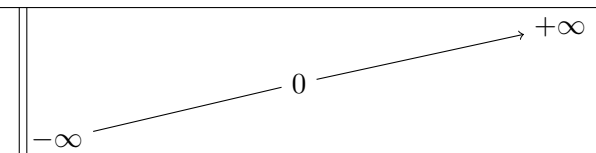
Définition : La fonction \ln est la fonction réciproque de la fonction \exp . Ainsi, \ln est bijective de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

- *Dérivée :* \ln est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- *Monotonie :* \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*
- *Valeurs remarquables :* $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Théorème *produit \rightarrow somme :* $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

On en déduit que :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln(x)$
- *Tableau de variation (et limites)*

x	0	1	$+\infty$
\ln			

La fonction \ln est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}

On en déduit que :

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) < \ln(y) \iff x < y$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq \ln(y) \iff x \leq y$
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) = \ln(y) \iff x = y$

3) Réciprocité et représentation graphique

Théorème : Les fonctions exp étant réciproque l'une de l'autre, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(x) = y \iff x = \ln(y)$$

- Représentations graphiques de ln et exp

