Démonstrations exigibles

Semaine 28 (3 mai 2021)

---

1. *Existence d'un polynôme interpolateur (cf. exercice TD 19 n° 10)*

Soient $n \in \mathbb{N}$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $n+1$ points $(a_0; b_0), \ldots, (a_n; b_n)$ où les a_i sont deux à deux distincts.

Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall i \in [\![0; n]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$

Preuve : On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array}$$

Montrons que cette application est bijective. On aura alors que : pour tout $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que : $\varphi(P) = (b_0, \ldots, b_n)$, i.e. $\forall i \in [\![0; n]\!], \quad P(a_i) = b_i$.

- L'application φ est linéaire.

  En effet, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_0), \ldots, (\lambda P + \mu Q)(a_n)) \\ &= (\lambda P(a_0) + \mu Q(a_0), \ldots, \lambda P(a_n) + \mu Q(a_n) \\ &= \lambda(P(a_0), \ldots, P(a_n)) + \mu(Q(a_0), \ldots, Q(a_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q). \end{aligned}$$

- Etant donné que les espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ ont pour dimension commune $n+1$ et que φ est linéaire, il suffit de montrer l'injectivité de φ pour montrer sa bijectivité.

  Montrons que φ est injective.

  Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$, on a : $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}} \iff \forall i \in [\![0; n]\!], \quad P(a_i) = 0$. Ainsi le polynôme P possède un nombre de racines ($n+1$ distinctes) strictement plus grand que son degré (au plus n). Le polynôme P est donc nul.
  On en déduit que φ est injective puis bijective.

Graphiquement, cela signifie qu'il existe une unique fonction polynomiale de degré au plus n, dont le graphe passe par les $n+1$ points $(a_i; b_i)$ pour $i \in [\![0; n]\!]$.

$\square$

2. *Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Montrer que les deux points suivants sont équivalents :

(i) a est racine multiple d'ordre $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ de P.

(ii) $\forall k \in [\![0; m-1]\!],\ P^{(k)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$.

Preuve : Raisonnons par double implication. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons (ii) et montrons (i).

Grâce à la formule de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \quad \text{où} \quad \deg(P) \geq m \geq 1 \quad \text{car} \quad P^{(m)}(a) \neq 0 \\ &= \sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \\ &= (X-a)^m Q \quad \text{où} \quad Q = \sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-m} \in \mathbb{K}[X]. \end{aligned}$$

Ainsi a est racine d'ordre au moins m de P. De plus, comme $Q(a) = \dfrac{P^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$, a est une racine d'ordre m de P.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons (i) et montrons (ii).

Par (i), il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-a)^m Q \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0.$$

Soit $k \in [\![0; m]\!]$, la formule de Leibniz nous assure que :

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}X^i} \left\{(X-a)^m\right\} Q^{(k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!}(X-a)^{m-i} Q^{(k-i)} \end{aligned}$$

- Cas n°1 : $0 \leq k \leq m-1$.

  Dans ce cas $0 \leq i \leq k \leq m-1$ et donc $1 \leq m-i$ pour tout $i \in [\![0; k]\!]$.

  Ainsi, en évaluant $(X-a)^{m-i}$ en a, on trouve 0, d'où $P^{(k)}(a) = 0$.

- Cas n°2 : $k = m$.

  En évaluant $P^{(m)}$ en a, on trouve :

$$\begin{aligned} P^{(m)}(a) &= \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \frac{m!}{(m-i)!}(a-a)^{m-i} Q^{(m-i)}(a)}_{=0} + \binom{m}{m} m! \underbrace{(a-a)^0}_{0^0=1!} Q(a) \\ &= m!\, Q(a) \neq 0 \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve.

$\square$

3. *Formule de Taylor avec reste intégral*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle et $a \in I$.

Montrer que : $\quad \forall x \in I, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$

Preuve : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition :

$\mathscr{P}(n)$: « Si $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ alors : $\quad \forall x \in I, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ ».

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, si $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ alors f' est continue sur I et, pour tout $x \in I$, on a

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a) \quad \text{i.e.} \quad \underbrace{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{Formule de Taylor pour } n=0}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

  On suppose que $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$. En particulier $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et, par hypothèse de récurrence :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

  La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I, $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (et en particulier sur $[a;x]$ ou $[x;a]$).
  De même, pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{(x-t)^n}{n!}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;x]$ (ou $[x;a]$).

  Soit $x \in I$ fixé. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

  D'où :

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  Par la principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

$\square$