

Programme de khôlle

Semaine 10 (16 novembre 2020)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 5 : EDL d'ordre 1 et 2

Exercices réalisés : TD5, exercices n° 1,2,3(1.),4,5(1.2.3.4.),6(1.2.5.6.),7,8,9,10

- ▶ Etudier l'existence de primitives et les calculer par reconnaissance d'une forme usuelle (primitives usuelles, dérivée d'une composée). La notation $\int f(t) dt$ désigne une primitive de f sur un intervalle donné.
- ▶ Savoir déterminer des primitives de fonctions du type : $t \mapsto e^{bt} \cos(at)$ ou $t \rightarrow e^{bt} \sin(at)$ (en passant par les complexes), $t \mapsto \cos^p(t) \sin^q(t)$ (par linéarisation), $t \mapsto \frac{1}{at^2 + bt + c}$.
- ▶ Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, avec ou sans condition initiale, de manière autonome.
 - ★ Dans le cas où les coefficients sont constants : une solution particulière pourra être cherchée sous une forme adaptée au second membre (cas travaillé en cours : second membre constant, polynomial, trigonométrique).
 - ★ Dans le cas général : chercher une solution évidente ; à défaut, on utilisera la méthode de variation de la constante.
- ▶ Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec ou sans second membre. Les étudiants doivent savoir, de manière autonome, déterminer une solution particulière lorsque le second membre est du type suivant :
 - ★ $t \mapsto Ae^{\omega t}$ avec $A, \omega \in \mathbb{C}$.

★ $t \mapsto B \cos(\omega t), t \mapsto B \sin(\omega t)$ avec $B, \omega \in \mathbb{R}$ (méthode par passage aux complexes).

★ Combinaison linéaire de ces fonctions en utilisant le principe de superposition.

- ▶ Résoudre par analyse-synthèse des équations fonctionnelles menant à des équations différentielles.

Note : Ne pas demander d'intégration par parties ni de changement de variable dans ce chapitre

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Intégrale d'une fonction rationnelle (tirée du TD5 exercice n° 3)*

Faire l'une des deux questions suivantes (au choix de l'examinateur) :

★ Etudier l'existence, en fonction de x , de l'intégrale $I(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}} dt$, puis la calculer.

★ Etudier l'existence, en fonction de x , de l'intégrale $J(x) = \int_3^x \frac{1}{-t^2 + t + 2} dt$, puis la calculer.

2. *Résolution d'une EDL d'ordre un sans second membre*

On considère l'équation différentielle $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = 0$ où $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue (\mathbb{K} désignant \mathbb{R} ou \mathbb{C}), et I est un intervalle de \mathbb{R} .

Déterminer les solutions de (E) sur I . On raisonnera par analyse-synthèse.

3. *Résolution d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants*

Résoudre l'équation différentielle : $(E) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin^2(t)$.

4. *Résolution d'une équation fonctionnelle par analyse-synthèse*

En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer l'ensemble des fonctions solutions du problème

$$(P) : \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dérivable} \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$