Démonstrations exigibles

Semaine 8 (2 novembre 2020)

---

1. *Intégrale d'une fonction rationnelle (tirée du TD5 exercice n°3)*

   Faire l'une des deux questions suivantes (au choix de l'examinateur) :

   ⋆ Etudier l'existence, en fonction de x, de l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}}\,\mathrm{dt}$, puis la calculer.

   ⋆ Etudier l'existence, en fonction de x, de l'intégrale $J(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{-t^2 + t + 2}\,\mathrm{dt}$, puis la calculer.

   Preuve :

   ⋆ Etude de $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}}\,\mathrm{dt}$.

   Le trinôme $t^2 - t + \dfrac{5}{2}$ a pour discriminant $(-1)^2 - 4 \times \dfrac{5}{2} = -9 < 0$.

   On écrit donc ce trinôme sous forme canonique : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad t^2 - t + \dfrac{5}{2} = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} > 0$.

   Ainsi, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}}$ est définie et continue (par opérations) sur $\mathbb{R}$.

   En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue sur $[0; x]$ ($[x; 0]$). La fonction I est donc définie sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
I(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}}\,\mathrm{dt} &= \int_0^x \frac{1}{\frac{9}{4} + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{4}{9} \int_0^x \frac{1}{1 + \frac{4}{9}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{2}{3} \int_0^x \frac{2/3}{1 + \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)^2}\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{2}{3} \left[\arctan\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)\right]_0^x \\
&= \frac{2}{3} \left[\arctan\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right].
\end{aligned}$$

   ⋆ Etude de $J(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{-t^2 + t + 2}\,\mathrm{dt}$.

   Le trinôme $-t^2 + t + 2$ a pour discriminant $1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$ et a pour racines -1 et 2.

   Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a la factorisation $-t^2 + t + 2 = -(t+1)(t-2)$.

   La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{-t^2 + t + 2}$ est définie et continue (par opérations) sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$.

   En particulier, la fonction f est continue sur le segment $[3; x]$ ($[x; 3]$) à condition que $x \in]2; +\infty[$.

   La fonction J est donc définie sur $]2; +\infty[$.

   Pour tout $x \in]2; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
J(x) = \int_3^x \frac{1}{-t^2 + t + 2}\,\mathrm{dt} &= -\int_3^x \frac{1}{(t+1)(t-2)}\,\mathrm{dt} \\
&= -\int_3^x \left[\frac{-1/3}{t+1} - \frac{-1/3}{t-2}\right]\mathrm{dt} \quad \text{[après décomposition en éléments simples]} \\
&= \frac{1}{3} \int_3^x \left[\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-2}\right]\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{3} \left[\ln|t+1| - \ln|t-2|\right]_3^x \\
&= \frac{1}{3} \left[\ln\left(\frac{t+1}{t-2}\right)\right]_3^x \quad \text{[car, pour } t \text{ entre } 3 \text{ et } x,\ t+1 > 0 \text{ et } t-2 > 0\text{]} \\
&= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x+1}{4(x-2)}\right).
\end{aligned}$$

2. *Résolution d'une EDL d'ordre un sans second membre*

On considère l'équation différentielle $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = 0$ où $a : I \to \mathbb{K}$ continue ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Déterminer les solutions de (E) sur I. On raisonnera par analyse-synthèse.

Preuve :

- ⋆ Préliminaires : On sait que la fonction $g : t \mapsto e^{-A(t)}$, où A est une primitive de a sur I (existe car a continue sur I), est une solution de (E). En effet :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = -A'(t)e^{-A(t)} = -a(t)e^{A(t)} = -a(t)g(t).$$

On remarque immédiatement que les fonctions $f_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, sont également solutions de (E) car

$$\forall t \in I, \quad f_\lambda'(t) = \lambda \left[\underbrace{-A'(t)}_{=-a(t)} e^{-A(t)} \right] = -a(t)f_\lambda(t).$$

Montrons que ces solutions sont les seules.

- ⋆ Raisonnons par analyse-synthèse :

Analyse : Supposons obtenue une solution f quelconque et étudions les propriétés que doit nécessairement vérifier f.

Etant donné que f est solution, on a : $\forall t \in I, \quad f'(t) \overset{(*)}{=} -a(t)f(t).$ On sait également que g est solution.
Comparons f (non connue) avec g (connue, non nulle car strictement positive).

Pour tout $t \in I$, on pose $h(t) = \dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{f(t)}{e^{-A(t)}} = f(t)e^{A(t)}$.
La fonction h est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I et, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)e^{A(t)} + f(t)\left[A'(t)e^{A(t)}\right] \\ &= -a(t)f(t)e^{A(t)} + f(t)a(t)e^{A(t)} \quad \text{[on a utilisé } (*)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante sur l'intervalle I et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall t \in I, \quad f(t) = h(t)e^{-A(t)} = \lambda e^{-A(t)}$.

Donc : SI f est solution, elle est obligatoirement de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Synthèse : Réciproquement, on a déjà montré que ces fonctions sont effectivement solutions de (E).

- ⋆ Conclusion : Les solutions de (E) sont exactement les fonctions :

$$t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \quad \text{pour } \lambda \text{ décrivant } \mathbb{K}.$$

3. *Résolution d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants*

Résoudre l'équation différentielle : $(E) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin^2(t)$.

L'équation (E) s'écrit également $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$.

- $\star$ L'équation caractéristique associée à (E) est : $r^2 - 3r + 2 = 0$ et possède deux racines réelles : 1 et 2.

  La solution générale de l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ associée à (E) est

$$\boxed{t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} \quad \textbf{avec} \quad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.}$$

- $\star$ Une solution particulière évidente f_1 de l'équation $(E_1) \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}$ est donnée par : $\boxed{f_1 \;:\; t \mapsto \frac{1}{4}}$.

- $\star$ Déterminons une solution particulière f_2 de l'équation $(E_2) \quad y'' - 3y' + 2y = -\frac{1}{2}\cos(2t)$.

  Pour cela déterminons une solution particulière de l'équation "complexifiée" (E_c) $y'' - 3y' + 2y = -\frac{1}{2}e^{2it}$.

  On la cherche sous la forme $f_P : t \mapsto Ce^{2it}$ où $C \in \mathbb{C}$ (car $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique).

$$\begin{aligned}
f_P \text{ solution de } (E_c) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (f_P)''(t) - 3(f_P)'(t) + 2f_P(t) = -\frac{1}{2}e^{2it} \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ -4Ce^{2it} - 6iCe^{2it} + 2Ce^{2it} = -\frac{1}{2}e^{2it} \\
&\Leftrightarrow C(-2 - 6i) = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + 3i} = \frac{1}{40} \cdot (1 - 3i)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $f_P : t \mapsto \frac{1}{40}(1 - 3i)e^{2it}$ est solution de (E_c).

  Une solution de (E_2) est donc donnée par $\boxed{f_2 : t \mapsto \mathbf{Re}(f_P)(t) = \frac{1}{40}\mathbf{Re}\left((1 - 3i)(\cos(2t) + i\sin(2t))\right) = \frac{1}{40}\left(\cos(2t) + 3\sin(2t)\right)}$.

- $\star$ La principe de superposition nous assure que $f_1 + f_2$ est une solution particulière à l'équation (E).

  Ainsi, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{t \mapsto \frac{1}{4} + \frac{1}{40}\left(\cos(2t) + 3\sin(2t)\right) + \lambda e^t + \mu e^{2t} \quad \textbf{avec} \quad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.}$$

4. *Résolution d'une équation fonctionnelle par analyse-synthèse*

En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer l'ensemble des fonctions solutions du problème

$$(P): \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{dérivable} \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad f(x+y)=f(x)f(y)$$

- ⋆ Analyse : On considère f une hypothétique solution de (P). La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad f(x+y)=f(x)f(y).$$

Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé quelconque, en dérivant par rapport à la variable y la relation précédente, on trouve :

$$\forall y\in\mathbb{R}, \quad f'(x+y)=f(x)f'(y)$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$, on obtient lorsque $y=0$:

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad f'(x)=\overbrace{f'(0)}^{\in\mathbb{R}}\,f(x).$$

Donc f doit être solution de l'EDL d'ordre 1 homogène à coefficient constant : $y'=ay$ (avec $a=f'(0)\in\mathbb{R}$).

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$x\mapsto \lambda e^{ax} \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

On a montré que <u>SI</u> f est une solution de (P) alors, <u>nécessairement</u>, f est de la forme $\boxed{x\mapsto\lambda e^{ax} \text{ où } \lambda,a\in\mathbb{R}}$.

- ⋆ Synthèse : On détermine, parmi les fonctions candidates, lesquelles sont effectivement des solutions de (P).

Soient $\lambda,a\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\lambda e^{ax}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle sera solution de (P) à condition que, pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, $\lambda e^{a(x+y)}=(\lambda e^{ax})(\lambda e^{ay})$, i.e. $\lambda e^{a(x+y)}=\lambda^2 e^{a(x+y)}$. Cette dernière relation étant équivalente à $\lambda=\lambda^2$, on obtient que $\lambda\in\{0;1\}$.

- ⋆ Conclusion : Les fonctions solutions de (P) sont $\boxed{\text{la fonction } x\mapsto 0 \text{ nulle sur } \mathbb{R} \text{ et les fonctions } x\mapsto e^{ax} \text{ où } a \text{ décrit } \mathbb{R}}$.