Programme de khôlle

Semaine 11 (23 novembre 2020)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 5 : EDL d'ordre 1 et 2

Exercices réalisés : TD5, exercices n°1,2,3(1.),4,5(1.2.3.4.),6(1.2.5.6.),7,8,9,10

- Etudier l'existence de primitives et les calculer par reconnaissante d'une forme usuelle (primitives usuelles, dérivée d'une composée). La notation $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne une primitive de f sur un intervalle donné.
- Savoir déterminer des primitives de fonctions du type : $t \mapsto e^{bt}\cos(at)$ ou $t \to e^{bt}\sin(at)$ (en passant par les complexes), $t \mapsto \cos^p(t)\sin^q(t)$ (par linéarisation), $t \mapsto \dfrac{1}{at^2+bt+c}$.
- Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, avec ou sans condition initiale, de manière autonome.
  - Dans le cas où les coefficients sont constants : une solution particulière pourra être cherchée sous une forme adaptée au second membre (cas travaillé en cours : second membre constant, polynomial, trigonométrique).
  - Dans le cas général : chercher une solution évidente ; à défaut, on utilisera la méthode de variation de la constante.
- Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec ou sans second membre. Les étudiants doivent savoir, de manière autonome, déterminer une solution particulière lorsque le second membre est du type suivant :
  - $t \mapsto Ae^{\omega t}$ avec $A, \omega \in \mathbb{C}$.
  - $t \mapsto B\cos(\omega t)$, $t \mapsto B\sin(\omega t)$ avec $B, \omega \in \mathbb{R}$ (méthode par passage aux complexes).
  - Combinaison linéaire de ces fonctions en utilisant le principe de superposition.
- Résoudre par analyse-synthèse des équations fonctionnelles menant à des équations différentielles.

Note : Ne pas demander d'intégration par parties ni de changement de variable dans ce chapitre

Chapitre 6 : Systèmes linéaires

Exercices réalisés : TD6, exercices n°1,4,5,6

- Savoir échelonner par lignes et réduire une matrice $n \times p$ par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.
- Savoir résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues.
- Maitriser le vocabulaire : matrice associée à un système linéaire, matrice augmentée associée à un système linéaire, matrice échelonnée par lignes (EL), matrice échelonnée par lignes réduite (ELR), solution, pivot, équations principales, équations de compatibilité, inconnues principales, inconnues secondaires ou paramètres.
- Savoir déterminer le rang d'une matrice, d'un système.
- Dans le cas d'un système 2×2, connaître la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une unique solution à l'aide du déterminant. Connaître les formules de Cramer dans ce cas.
- Savoir mettre en évidence la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire avec second membre sous la forme $s_P + \mathcal{S}_0 = \{s_P + s_0 \mid s_0 \in \mathcal{S}_0\}$, où s_P est une solution particulière et $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions du système homogène.
- Savoir interpréter géométriquement les solutions d'un système dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ comme intersections de droites ou de plans.

Note : la khôlle comportera nécessairement une résolution d'un système linéaire $n \times p$ avec $n \geq 3$ et $p \geq 3$.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Résolution d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants*

   Résoudre l'équation différentielle : $(E) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin^2(t)$.

2. *Résolution d'une équation fonctionnelle par analyse-synthèse*

   En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer l'ensemble des fonctions solutions du problème

$$(P): \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{dérivable} \qquad \text{et} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

3. *Structure des solutions d'un système linéaire homogène et d'un système linéaire avec second membre.*

   On considère un système linéaire à n lignes et p colonnes (S). On notera (S_H) le système linéaire homogène associé à (S), $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (S_H).

   Enoncer puis démontrer l'un des deux résultats suivants (au choix de l'examinateur).

   - PROPOSITION 1 : L'ensemble $\mathscr{S}_0$ vérifie les propriétés suivantes :
     (i) $0_{\mathbb{K}^p} = (0, \ldots, 0) \in \mathscr{S}_0$.
     (ii) Si $x, y \in \mathscr{S}_0 \quad$ alors $\quad x + y \in \mathscr{S}_0$.
     (iii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $x \in \mathscr{S}_0 \quad$ alors $\quad \lambda . x \in \mathscr{S}_0$.
   - PROPOSITION 2 : On suppose que (S) est compatible. Prenons $s_P \in \mathscr{S}$ une solution particulière de (S). Alors :

$$\mathscr{S} = s_P + \mathscr{S}_0 = \{s_P + s_0 \,|\, s_0 \in \mathscr{S}_0\}.$$