Démonstrations exigibles

Semaine 11 (23 novembre 2020)

---

1. *Résolution d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants*

   Résoudre l'équation différentielle : $(E) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin^2(t)$.

   L'équation (E) s'écrit également $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$.

   - ⋆ L'équation caractéristique associée à (E) est : $r^2 - 3r + 2 = 0$ et possède deux racines réelles : 1 et 2.

     La solution générale de l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ associée à (E) est

     $$\boxed{t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} \quad \textbf{avec} \quad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.}$$

   - ⋆ Une solution particulière évidente f_1 de l'équation $(E_1) \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}$ est donnée par : $\boxed{f_1 \,:\, t \mapsto \frac{1}{4}}$.

   - ⋆ Déterminons une solution particulière f_2 de l'équation $(E_2) \quad y'' - 3y' + 2y = -\frac{1}{2}\cos(2t)$.

     Pour cela déterminons une solution particulière de l'équation "complexifiée" (E_c) $y'' - 3y' + 2y = -\frac{1}{2}e^{2it}$.

     On la cherche sous la forme $f_P : t \mapsto Ce^{2it}$ où $C \in \mathbb{C}$ (car $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique).

     $$\begin{aligned} f_P \text{ solution de } (E_c) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (f_P)''(t) - 3(f_P)'(t) + 2f_P(t) = -\frac{1}{2}e^{2it} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ -4Ce^{2it} - 6iCe^{2it} + 2Ce^{2it} = -\frac{1}{2}e^{2it} \\ &\Leftrightarrow C(-2-6i) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow C = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+3i} = \frac{1}{40}\cdot(1-3i) \end{aligned}$$

     Ainsi, $f_P : t \mapsto \frac{1}{40}(1-3i)e^{2it}$ est solution de (E_c).

     Une solution de (E_2) est donc donnée par $\boxed{f_2 : t \mapsto \mathrm{Re}(f_P)(t) = \frac{1}{40}\mathrm{Re}\left((1-3i)(\cos(2t) + i\sin(2t))\right) = \frac{1}{40}\left(\cos(2t) + 3\sin(2t)\right)}$.

   - ⋆ La principe de superposition nous assure que $f_1 + f_2$ est une solution particulière à l'équation (E).

     Ainsi, la solution générale de (E) est :

     $$\boxed{t \mapsto \frac{1}{4} + \frac{1}{40}\left(\cos(2t) + 3\sin(2t)\right) + \lambda e^t + \mu e^{2t} \quad \textbf{avec} \quad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.}$$

2. *Résolution d'une équation fonctionnelle par analyse-synthèse*

   En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer l'ensemble des fonctions solutions du problème

$$(P): \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{dérivable} \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

⋆ Analyse : On considère f une hypothétique solution de (P). La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque, en dérivant par rapport à la variable y la relation précédente, on trouve :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f(x)f'(y)$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient lorsque $y = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \overbrace{f'(0)}^{\in\mathbb{R}} f(x).$$

Donc f doit être solution de l'EDL d'ordre 1 homogène à coefficient constant : $y' = ay$ (avec $a = f'(0) \in \mathbb{R}$).

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$x \mapsto \lambda e^{ax} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On a montré que SI f est une solution de (P) alors, nécessairement, f est de la forme $\boxed{x \mapsto \lambda e^{ax} \text{ où } \lambda, a \in \mathbb{R}}$.

⋆ Synthèse : On détermine, parmi les fonctions candidates, lesquelles sont effectivement des solutions de (P).

Soient $\lambda, a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \lambda e^{ax}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle sera solution de (P) à condition que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda e^{a(x+y)} = (\lambda e^{ax})(\lambda e^{ay})$, i.e. $\lambda e^{a(x+y)} = \lambda^2 e^{a(x+y)}$. Cette dernière relation étant équivalente à $\lambda = \lambda^2$, on obtient que $\lambda \in \{0; 1\}$.

⋆ Conclusion : Les fonctions solutions de (P) sont $\boxed{\text{la fonction } x \mapsto 0 \text{ nulle sur } \mathbb{R} \text{ et les fonctions } x \mapsto e^{ax} \text{ où } a \text{ décrit } \mathbb{R}}$.

3. *Structure des solutions d'un système linéaire homogène et d'un système linéaire avec second membre.*

On considère un système linéaire à n lignes et p colonnes (S). On notera (S_H) le système linéaire homogène associé à (S), $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (S_H).

Enoncer puis démontrer l'un des deux résultats suivants (au choix de l'examinateur).

⋆ PROPOSITION 1 : L'ensemble $\mathscr{S}_0$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $0_{\mathbb{K}^p} = (0, \ldots, 0) \in \mathscr{S}_0$.

(ii) Si $x, y \in \mathscr{S}_0$ alors $x + y \in \mathscr{S}_0$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $x \in \mathscr{S}_0$ alors $\lambda . x \in \mathscr{S}_0$.

preuve : On considère le système (S_H) : $\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$ où $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathbb{K}^{np}$.

(i) Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,1} \times 0 + \ldots + a_{i,p} \times 0 = 0$. Donc $(0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{K}^p} \in \mathscr{S}_0$.

(ii) Soient $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{S}_0$ et $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathscr{S}_0$. On a, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,p}x_p = 0 \quad (\star)$$
$$a_{i,1}y_1 + \ldots + a_{i,p}y_p = 0 \quad (\star\star).$$

En sommant les relations $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$a_{i,1}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{i,p}(x_p + y_p) = 0.$$

Donc $x + y = (x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p) \in \mathscr{S}_0$.

(iii) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{S}_0$. En multipliant $(\star)$ par λ, on a trouve que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$a_{i,1}(\lambda x_1) + \ldots + a_{i,p}(\lambda x_p) = 0.$$

Donc $\lambda . x = \lambda .(x_1, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) \in \mathscr{S}_0$.

□

⋆ PROPOSITION 2 : On suppose que (S) est compatible. Prenons $s_P \in \mathscr{S}$ une solution particulière de (S). Alors :

$$\mathscr{S} = s_P + \mathscr{S}_0 = \{s_P + s_0 \mid s_0 \in \mathscr{S}_0\}.$$

preuve : On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$ où $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathbb{K}^{np}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$.

Soit $s_P = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathscr{S}$, on a pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

$$a_{i,1}s_1 + \ldots + a_{i,p}s_p = b_i.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{S} &\iff \forall i \in [\![1;n]\!], \quad a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i \\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!], \quad a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,p}x_p = a_{i,1}s_1 + \ldots + a_{i,p}s_p \\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!], \quad a_{i,1}(x_1 - s_1) + \ldots + a_{i,p}(x_p - s_p) = 0 \\ &\iff (x_1 - s_1, \ldots, x_p - s_p) \in \mathscr{S}_0 \\ &\iff x - s_P = (x_1, \ldots, x_p) - (s_1, \ldots, s_p) \in \mathscr{S}_0 \\ &\iff x \in s_P + \mathscr{S}_0 \end{aligned}$$

□