Programme de khôlle

Semaine 12 (30 novembre 2020)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 6 : Systèmes linéaires

Exercices réalisés : TD6, exercices n° 1,4,5,6

- Savoir échelonner par lignes et réduire une matrice $n \times p$ par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.
- Savoir résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues.
- Maitriser le vocabulaire : matrice associée à un système linéaire, matrice augmentée associée à un système linéaire, matrice échelonnée par lignes (EL), matrice échelonnée par lignes réduite (ELR), solution, pivot, équations principales, équations de compatibilité, inconnues principales, inconnues secondaires ou paramètres.
- Savoir déterminer le rang d'une matrice, d'un système.
- Dans le cas d'un système 2×2, connaître la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une unique solution à l'aide du déterminant. Connaître les formules de Cramer dans ce cas.
- Savoir mettre en évidence la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire avec second membre sous la forme $s_P + \mathcal{S}_0 = \{s_P + s_0 \mid s_0 \in \mathcal{S}_0\}$, où s_P est une solution particulière et $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions du système homogène.
- Savoir interpréter géométriquement les solutions d'un système dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ comme intersections de droites ou de plans.

  Note : la khôlle comportera nécessairement une résolution d'un système linéaire $n \times p$ avec $n \geq 3$ et $p \geq 3$.

Chapitre 7 : Ensembles de nombres

Exercices réalisés : TD7, exercices n° 1,2,3,4

- Savoir raisonner par récurrence simple, double, forte, par l'absurde.
- Savoir déterminer la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel.
- Réaliser la division euclidienne entre deux entiers naturels.
- Savoir calculer le pgcd, le ppcm de deux entiers naturels (par l'algorithme d'Euclide ou la décomposition en facteurs premiers).
- Montrer que des entiers (ne) sont (pas) premiers.

Note : Aucune compétence technique n'est exigible. Les exercices demandés doivent être simples. Les théorèmes de Gauss, Bézout, les congruences... ne sont pas au programme de PCSI.

- Parties de $\mathbb{R}$, notions de : majorants, minorants, maximum, minimum, bornes supérieures et inférieures.

Note : Pour l'instant aucun exercice n'a été réalisé sur la notion de borne supérieure et inférieure (quelques exemples ont été traités en cours).

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Structure des solutions d'un système linéaire homogène et d'un système linéaire avec second membre.*

   On considère un système linéaire à n lignes et p colonnes (S). On notera (S_H) le système linéaire homogène associé à (S), $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (S_H).

   Enoncer puis démontrer l'un des deux résultats suivants (au choix de l'examinateur).

   ⋆ PROPOSITION 1 : L'ensemble $\mathscr{S}_0$ vérifie les propriétés suivantes :

   (i) $0_{\mathbb{K}^p} = (0, \dots, 0) \in \mathscr{S}_0$.

   (ii) Si $x, y \in \mathscr{S}_0$ alors $x + y \in \mathscr{S}_0$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $x \in \mathscr{S}_0$ alors $\lambda.x \in \mathscr{S}_0$.

⋆ PROPOSITION 2 : On suppose que (S) est compatible. Prenons $s_P \in \mathscr{S}$ une solution particulière de (S). Alors :

$$\mathscr{S} = s_P + \mathscr{S}_0 = \{s_P + s_0 \,|\, s_0 \in \mathscr{S}_0\}.$$

2. *Raisonnement par récurrence forte*

   Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

3. *Raisonnement par l'absurde*

   Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

4. *Justifier l'existence d'une borne supérieure et la calculer*

   Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.

   On note $A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$.

   Montrer que A, B et $A + B$ admettent une borne supérieure.

   Puis montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.