Démonstrations exigibles

Semaine 12 (30 novembre 2020)

---

1. *1. Structure des solutions d'un système linéaire homogène et d'un système linéaire avec second membre.*

On considère un système linéaire à n lignes et p colonnes (S). On notera (S_H) le système linéaire homogène associé à (S), $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (S_H).

Enoncer puis démontrer l'un des deux résultats suivants (au choix de l'examinateur).

⋆ PROPOSITION 1 : L'ensemble $\mathscr{S}_0$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $0_{\mathbb{K}^p} = (0, \dots, 0) \in \mathscr{S}_0$.

(ii) Si $x, y \in \mathscr{S}_0 \quad$ alors $\quad x + y \in \mathscr{S}_0$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $x \in \mathscr{S}_0 \quad$ alors $\quad \lambda.x \in \mathscr{S}_0$.

<u>preuve :</u> On considère le système $(S_H) : \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$ où $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathbb{K}^{np}$.

(i) Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\quad a_{i,1} \times 0 + \dots + a_{i,p} \times 0 = 0$. Donc $(0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{K}^p} \in \mathscr{S}_0$.

(ii) Soient $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathscr{S}_0$ et $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathscr{S}_0$. On a, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p = 0 \quad (\star)$$
$$a_{i,1}y_1 + \dots + a_{i,p}y_p = 0 \quad (\star\star).$$

En sommant les relations $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$a_{i,1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{i,p}(x_p + y_p) = 0.$$

Donc $x + y = (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \in \mathscr{S}_0$.

(iii) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_p) \in \mathscr{S}_0$. En multipliant $(\star)$ par λ, on a trouve que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$a_{i,1}(\lambda x_1) + \dots + a_{i,p}(\lambda x_p) = 0.$$

Donc $\lambda.x = \lambda.(x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \in \mathscr{S}_0$.

□

⋆ PROPOSITION 2 : On suppose que (S) est compatible. Prenons $s_P \in \mathscr{S}$ une solution particulière de (S). Alors :

$$\mathscr{S} = s_P + \mathscr{S}_0 = \{s_P + s_0 \,|\, s_0 \in \mathscr{S}_0\}.$$

<u>preuve :</u> On considère le système $(S) : \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$ où $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathbb{K}^{np}$ et $(b_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n$.

Soit $s_P = (s_1, \dots, s_p) \in \mathscr{S}$, on a pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

$$a_{i,1}s_1 + \dots + a_{i,p}s_p = b_i.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{S} &\iff \forall i \in [\![1;n]\!], \quad a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i \\
&\iff \forall i \in [\![1;n]\!], \quad a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,p}x_p = a_{i,1}s_1 + \ldots + a_{i,p}s_p \\
&\iff \forall i \in [\![1;n]\!], \quad a_{i,1}(x_1 - s_1) + \ldots + a_{i,p}(x_p - s_p) = 0 \\
&\iff (x_1 - s_1, \ldots, x_p - s_p) \in \mathscr{S}_0 \\
&\iff x - s_P = (x_1, \ldots, x_p) - (s_1, \ldots, s_p) \in \mathscr{S}_0 \\
&\iff x \in s_P + \mathscr{S}_0
\end{aligned}$$

$\square$

2. *Raisonnement par récurrence forte*

Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

preuve : Montrons par récurrence forte sur $\mathbb{N}^{\geq 2}$ la proposition $\mathscr{P}(n)$: $\ll n$ possède, au moins, un diviseur premier $\gg$.

- ⋆ $\mathscr{P}(2)$ est vraie car 2 possède un diviseur premier : lui-même.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Supposons que, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est également vraie.

  Deux cas sont possibles :

  — Soit $n+1$ est un nombre premier, auquel cas il possède un diviseur premier : lui-même.

  — Soit $n+1$ est composé (non premier), auquel cas il possède un diviseur $d \in [\![2;n]\!]$.
  Par hypothèse de récurrence, tout entier appartenant à $[\![2;n]\!]$ possède un diviseur premier, donc d possède un diviseur premier p.
  En fin de compte, on a : $\quad p \mid d \quad$ et $\quad d \mid n+1$. Donc, par transitivité, $p \mid n+1$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- ⋆ Par le principe de récurrence forte, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

□

3. *Raisonnement par l'absurde*

Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un nombre fini $n \in \mathbb{N}^\star$ de nombres premiers : $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

On considère l'entier $A = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1 = \prod_{k=1}^{n} p_k + 1 \geq 2$.

Etant donné que A est un nombre entier supérieur ou égal à 2, on sait que A possède, au moins, un diviseur premier.

Autrement dit, il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que : $p_i \mid A$.

Ainsi, comme p_i divise $\prod_{k=1}^{n} p_k$, il divise également la différence $A - \prod_{k=1}^{n} p_k = 1$, d'où $p_i \mid 1$.

Etant donné que p_i est premier, cette dernière relation est absurde.

Conclusion : L'ensemble des nombres premiers est infini.

$\square$

4. *Justifier l'existence d'une borne supérieure et la calculer*

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.

On note $A+B = \{a+b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$.

Montrer que A, B et $A+B$ admettent une borne supérieure.

Puis montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

preuve : Montrons que A, B et $A+B$ admettent une borne supérieure.

- ⋆ On sait que A et B sont non vides majorés. Ainsi, le théorème de la borne supérieure nous assure que $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent.
- ⋆ Etant donné que A et B sont non vides, il en est de même pour $A+B$. De plus, comme $\sup(A)$ est un majorant de A et $\sup(B)$ est un majorant de B, on a : $\forall (a,b) \in A \times B,\; a+b \leq \sup(A) + \sup(B)$.

  Donc $A+B$ est non vide majoré par $\sup(A)+\sup(B)$. Le théorème de la borne supérieure nous assure que $\sup(A+B)$ existe.

Montrons que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

- ⋆ On sait déjà que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A+B$, il reste à montrer que c'est le plus petit.

  Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de $A+B$, on a : $\forall (a,b) \in A \times B,\; a+b \leq M$.

  Ainsi : $\forall (a,b) \in A \times B,\; a \leq M - b$ et, pour tout $b \in B$, $M-b$ est un majorant de A. Donc : $\forall b \in B,\, \sup(A) \leq M - b$.

  Cela implique que : $\forall b \in B,\, b \leq M - \sup(A)$, et $M - \sup(A)$ est un majorant de B, donc $\sup(B) \leq M - \sup(A)$.

  Finalement : $\sup(A) + \sup(B) \leq M$.
- ⋆ En conclusion : $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$, i.e. $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

$\square$