# Programme de khôlle

## Semaine 13 (7 décembre 2020)

---

**La khôlle est constituée :**

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

## Chapitre 7 : Ensembles de nombres

*Exercices réalisés : TD7, exercices n°1,2,3,4,5,6,7(A,B,C,D),9*

- Savoir raisonner par récurrence simple, double, forte, par l'absurde.
- Savoir déterminer la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel.
- Réaliser la division euclidienne entre deux entiers naturels.
- Savoir calculer le pgcd, le ppcm de deux entiers naturels (par l'algorithme d'Euclide ou la décomposition en facteurs premiers).
- Montrer que des entiers (ne) sont (pas) premiers.

**Note : Aucune compétence technique n'est exigible. Les exercices demandés doivent être simples. Les théorèmes de Gauss, Bézout, les congruences... ne sont pas au programme de PCSI.**

- Déterminer les majorants, minorants, maximum, minimum, bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ lorsqu'ils existent.
- Connaître la définition de la partie entière d'un nombre réel et les notions d'approximations décimales à $10^{-n}$ par défaut ou par excès.
- Savoir établir des inégalités ou des égalités faisant intervenir des parties entières.

## Chapitre 8 : Suites numériques

*Exercices réalisés : TD8, exercices n°2,4*

- Connaître les définitions de suites minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes.
- Savoir déterminer, sans conjecture/récurrence, le terme général d'une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou récurrente linéaire d'ordre deux.
- Savoir déterminer (si possible) le terme général d'une suite qui n'est pas d'un des types précédents par conjecture/récurrence.
- Connaître les définitions formalisées de limite finie ou infinie d'une suite à valeurs réelles ; connaître les notions de convergence et divergence d'une suite.
- Savoir calculer une limite grâce aux opérations sur les limites.

**Note : Les théorèmes d'encadrement, minoration et majoration, de la limite monotone, des suites adjacentes ne sont pas encore au programme.**

## Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Raisonnement par récurrence forte*

   Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à $2$ possède un diviseur premier.

2. *Justifier l'existence d'une borne supérieure et la calculer*

   Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
   On note $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\, b\in B\}$.
   Montrer que $A$, $B$ et $A+B$ admettent une borne supérieure.
   Puis montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

3. *Unicité de la limite d'une suite en cas d'existence (on traite le cas de limites finies)*

   Soient $\ell_1,\,\ell_2\in\mathbb{R}$ et $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En raisonnant par l'absurde montrer que :
   Si $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \quad$ et $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \quad$ alors $\quad \ell_1=\ell_2$.

4. *Limite d'une somme, d'un produit de suites convergentes*

   Soient $(u_n),(v_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer les deux résultats suivants :

- ⋆ Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites qui convergent vers $0$ alors $(u_n + v_n)$ converge vers $0$.
- ⋆ Si $(u_n)$ est une suite bornée et $(v_n)$ est une suite qui converge vers $0$ alors $(u_n v_n)$ converge vers $0$.