Démonstrations exigibles

Semaine 13 (7 décembre 2020)

---

1. *Raisonnement par récurrence forte*

   Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

   preuve : Montrons par récurrence forte sur $\mathbb{N}^{\geq 2}$ la proposition $\mathscr{P}(n)$: $\ll n$ possède, au moins, un diviseur premier $\gg$.

   - $\mathscr{P}(2)$ est vraie car 2 possède un diviseur premier : lui-même.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Supposons que, pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est également vraie.

     Deux cas sont possibles :

     — Soit $n+1$ est un nombre premier, auquel cas il possède un diviseur premier : lui-même.

     — Soit $n+1$ est composé (non premier), auquel cas il possède un diviseur $d \in [\![2; n]\!]$.
     Par hypothèse de récurrence, tout entier appartenant à $[\![2; n]\!]$ possède un diviseur premier, donc d possède un diviseur premier p.
     En fin de compte, on a : $\quad p \mid d \quad$ et $\quad d \mid n+1$. Donc, par transitivité, $p \mid n+1$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par le principe de récurrence forte, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

$\square$

2. *Justifier l'existence d'une borne supérieure et la calculer*

   Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.

   On note $A+B = \{a+b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$.

   Montrer que A, B et $A+B$ admettent une borne supérieure.

   Puis montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

   preuve : Montrons que A, B et $A+B$ admettent une borne supérieure.

   ⋆ On sait que A et B sont non vides majorés. Ainsi, le théorème de la borne supérieure nous assure que $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent.

   ⋆ Etant donné que A et B sont non vides, il en est de même pour $A+B$. De plus, comme $\sup(A)$ est un majorant de A et $\sup(B)$ est un majorant de B, on a : $\forall (a,b) \in A \times B,\ a+b \leq \sup(A) + \sup(B)$.

     Donc $A+B$ est non vide majoré par $\sup(A)+\sup(B)$. Le théorème de la borne supérieure nous assure que $\sup(A+B)$ existe.

   Montrons que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

   ⋆ On sait déjà que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A+B$, il reste à montrer que c'est le plus petit.

     Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de $A+B$, on a : $\forall (a,b) \in A \times B,\ a+b \leq M$.

     Ainsi : $\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq M - b$ et, pour tout $b \in B$, $M - b$ est un majorant de A. Donc : $\forall b \in B, \sup(A) \leq M - b$.

     Cela implique que : $\forall b \in B,\ b \leq M - \sup(A)$, et $M - \sup(A)$ est un majorant de B, donc $\sup(B) \leq M - \sup(A)$.

     Finalement : $\sup(A) + \sup(B) \leq M$.

   ⋆ En conclusion : $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$, i.e. $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

   □

3. *Unicité de la limite d'une suite en cas d'existence (on traite le cas de limites finies)*

Soient $\ell_1,\, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En raisonnant par l'absurde montrer que :

Si $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \quad$ et $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \quad$ alors $\quad \ell_1 = \ell_2$.

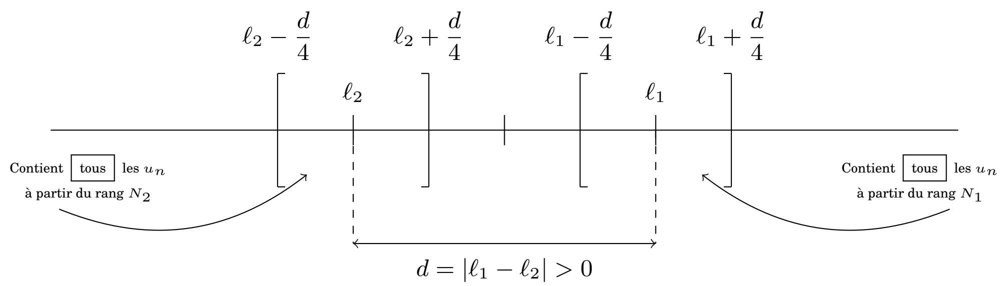
<u>Preuve :</u> Supposons que (u_n) possède ℓ_1 et ℓ_2 pour limites et montrons que $\ell_1 = \ell_2$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$. Pour fixer les idées, on supposera que $\ell_2 < \ell_1$.

On note $\boxed{d = |\ell_1 - \ell_2| > 0}$.

- $\star$ Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$, on sait que : $\exists N_1 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell_1| \leq \dfrac{d}{4},$ ce qui s'écrit également $\ell_1 - \dfrac{d}{4} \leq u_n \leq \ell_1 + \dfrac{d}{4}$.
- $\star$ Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, on sait que : $\exists N_2 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_2, \quad |u_n - \ell_2| \leq \dfrac{d}{4},$ ce qui s'écrit également $\ell_2 - \dfrac{d}{4} \leq u_n \leq \ell_2 + \dfrac{d}{4}$.

Représentation graphique de la situation :



En notant $N_3 = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\forall n \geq N_3, \quad \ell_2 - \frac{d}{4} \leq u_n \leq \ell_2 + \frac{d}{4} < \ell_1 - \frac{d}{4} \leq u_n \leq \ell_1 + \frac{d}{4}.$$

En particulier : $\quad \forall n \geq N_3,\; u_n < u_n \quad$ ce qui est absurde.

Donc $\ell_1 = \ell_2$.

$\square$

4. *Limite d'une somme, d'un produit de suites convergentes*

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer les deux résultats suivants :

(i) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui convergent vers 0 alors $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

(ii) Si (u_n) est une suite bornée et (v_n) est une suite qui converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

<u>Preuve :</u>

(i) Supposons que (u_n) et (v_n) convergent vers 0 et montrons que $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$.

- $\star$ Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \quad |u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- $\star$ Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que : $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \quad |v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

En notant $N_3 = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_3, \quad |u_n + v_n| &\leq |u_n| + |v_n| \quad \text{[Par l'inégalité triangulaire]} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$.

- $\star$ Comme (u_n) est bornée, on sait que : $\exists M \in \mathbb{R}_+^\star, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$.
- $\star$ Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \quad |u_n v_n| &= |u_n| \times |v_n| \\ &\leq M \times \frac{\varepsilon}{M} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(u_n v_n)$ converge vers 0.

$\square$