Programme de khôlle

Semaine 14 (14 décembre 2020)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 7 : Ensembles de nombres

Exercices réalisés : TD7, exercices n°1,2,3,4,5,6,7(A,B,C,D),9

- Savoir raisonner par récurrence simple, double, forte, par l'absurde.
- Savoir déterminer la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel.
- Réaliser la division euclidienne entre deux entiers naturels.
- Savoir calculer le pgcd, le ppcm de deux entiers naturels (par l'algorithme d'Euclide ou la décomposition en facteurs premiers).
- Montrer que des entiers (ne) sont (pas) premiers.

Note : Aucune compétence technique n'est exigible. Les exercices demandés doivent être simples. Les théorèmes de Gauss, Bézout, les congruences... ne sont pas au programme de PCSI.

- Déterminer les majorants, minorants, maximum, minimum, bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ lorsqu'ils existent.
- Connaître la définition de la partie entière d'un nombre réel et les notions d'approximations décimales à 10^{-n} par défaut ou par excès.
- Savoir établir des inégalités ou des égalités faisant intervenir des parties entières.

Chapitre 8 : Suites numériques

Exercices réalisés : TD8, exercices n°2,3,4,5(1 à 4),7,8,9,16,17,18

- Connaître les définitions de suites minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes.
- Savoir déterminer, sans conjecture/récurrence, le terme général d'une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou récurrente linéaire d'ordre deux.
- Savoir déterminer (si possible) le terme général d'une suite qui n'est pas d'un des types précédents par conjecture/récurrence.
- Connaître les définitions formalisées de limite finie ou infinie d'une suite à valeurs réelles ; connaître les notions de convergence et divergence d'une suite.
- Savoir calculer une limite grâce aux opérations sur les limites.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Montrer l'existence d'une limite par le théorème d'encadrement, de minoration, de majoration, le théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes.
- Montrer la convergence ou la divergence d'une suite par extraction (dont indice pair et impair).
- Etudier (avec des guides) une suite récurrente du type $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Unicité de la limite d'une suite en cas d'existence (on traite le cas de limites finies)*

   Soient $\ell_1,\ \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En raisonnant par l'absurde montrer que :
   Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.
2. *Limite d'une somme, d'un produit de suites convergentes*

   Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer les deux résultats suivants :
   - ⋆ Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui convergent vers 0 alors $(u_n + v_n)$ converge vers 0.
   - ⋆ Si (u_n) est une suite bornée et (v_n) est une suite qui converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

3. *Théorème de la limite monotone (on traite le cas croissant majoré)*

   Montrer que toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ croissante et majorée converge vers la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4. *Partie entière d'un nombre réel et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$*

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On admet qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p+1$

   (i) Montrer qu'un tel entier p est unique.
   On l'appelle la partie entière de x on le note $\lfloor x \rfloor$.

   (ii) Montrer que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels (on utilisera la notion de partie entière et le théorème d'encadrement).