Démonstrations exigibles

Semaine 13 (7 décembre 2020)

---

1. *Unicité de la limite d'une suite en cas d'existence (on traite le cas de limites finies)*

Soient ℓ_1, $\ell_2 \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En raisonnant par l'absurde montrer que :

Si $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \quad$ et $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \quad$ alors $\quad \ell_1 = \ell_2$.

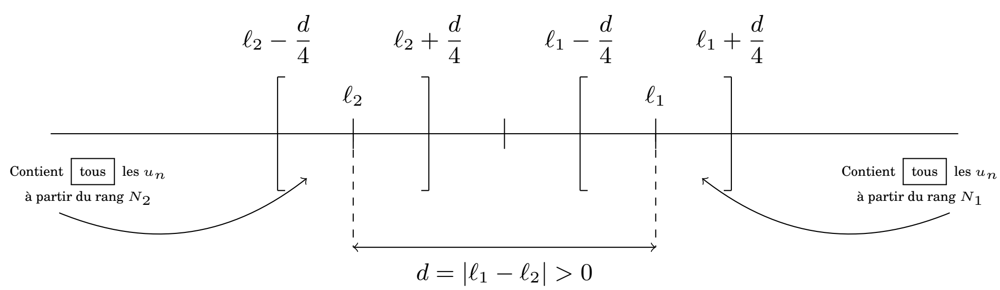
Preuve : Supposons que (u_n) possède ℓ_1 et ℓ_2 pour limites et montrons que $\ell_1 = \ell_2$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$. Pour fixer les idées, on supposera que $\ell_2 < \ell_1$.

On note $\boxed{d = |\ell_1 - \ell_2| > 0}$.

- ⋆ Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$, on sait que : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell_1| \leq \dfrac{d}{4}$, ce qui s'écrit également $\quad \ell_1 - \dfrac{d}{4} \leq u_n \leq \ell_1 + \dfrac{d}{4}$.
- ⋆ Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, on sait que : $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \quad |u_n - \ell_2| \leq \dfrac{d}{4}$, ce qui s'écrit également $\quad \ell_2 - \dfrac{d}{4} \leq u_n \leq \ell_2 + \dfrac{d}{4}$.

Représentation graphique de la situation :



En notant $N_3 = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\forall n \geq N_3, \quad \ell_2 - \frac{d}{4} \leq u_n \leq \ell_2 + \frac{d}{4} < \ell_1 - \frac{d}{4} \leq u_n \leq \ell_1 + \frac{d}{4}.$$

En particulier : $\quad \forall n \geq N_3,\ u_n < u_n \quad$ ce qui est absurde.

Donc $\ell_1 = \ell_2$.

□

2. *Limite d'une somme, d'un produit de suites convergentes*

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer les deux résultats suivants :

(i) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui convergent vers 0 alors $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

(ii) Si (u_n) est une suite bornée et (v_n) est une suite qui converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Preuve :

(i) Supposons que (u_n) et (v_n) convergent vers 0 et montrons que $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$.

- $\star$ Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \quad |u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- $\star$ Comme $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que : $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \quad |v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

En notant $N_3 = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_3, \quad |u_n + v_n| &\leq |u_n| + |v_n| \quad \text{[Par l'inégalité triangulaire]} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$.

- $\star$ Comme (u_n) est bornée, on sait que : $\exists M \in \mathbb{R}_+^\star, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$.
- $\star$ Comme $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \quad |u_n v_n| &= |u_n| \times |v_n| \\ &\leq M \times \frac{\varepsilon}{M} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(u_n v_n)$ converge vers 0.

$\square$

3. *Théorème de la limite monotone (on traite le cas croissant majoré)*

Montrer que toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ croissante et majorée converge vers la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

<u>Preuve :</u> Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs réelles croissante et majorée, montrons qu'elle converge.

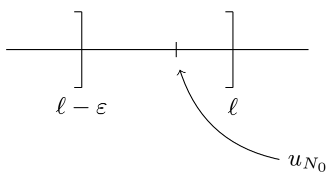
- L'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ (car la suite (u_n) est majorée).
  Le théorème de la borne supérieure nous assure que $\sup\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ existe, on le note $\quad \ell = \sup\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

- Montrons que (u_n) converge vers ℓ.

  Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que : $\quad \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon, \quad$ i.e. $\quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$.

  - ⋆ Comme ℓ est un majorant de la suite (u_n), on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$.

  - ⋆ Comme ℓ est le plus petit des majorants de la suite (u_n), on a : $\quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \ell - \varepsilon < u_{N_0}$.

    Un tel élément u_{N_0} existe bien car :

    s'il n'existait aucun terme de la suite (u_n) dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon; \ell]$,
    le réel $\ell - \varepsilon$ serait un majorant de (u_n) strictement plus petit que ℓ,
    ce qui est impossible.

  - ⋆ Comme (u_n) est croissante, on a : $\quad \forall n \geq N_0,\ \ell - \varepsilon < u_{N_0} \leq u_n$.

  Donc, on obtient : $\quad \forall n \geq N_0, \quad \ell - \varepsilon < u_{N_0} \leq u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$.

  On en déduit : $\quad \forall n \geq N_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui conclut la preuve.

□

4. *Partie entière d'un nombre réel et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On admet qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p+1$

(i) Montrer qu'un tel entier p est unique. On l'appelle la partie entière de x on le note $\lfloor x \rfloor$.

(ii) Montrer que x est limite d'une suite de nombres rationnels (on utilisera la notion de partie entière et le théorème d'encadrement).

<u>Preuve :</u>

(i) Montrons l'unicité d'un entier p tel que $p \leq x < p+1$.

Soient p_1 et p_2 deux entiers tels que : $\begin{cases} p_1 \leq x < p_1 + 1 \ (\star) \\ p_2 \leq x < p_2 + 1 \quad \text{ou encore} \quad -p_2 - 1 < -x \leq -p_2 \ (\star\star) \end{cases}$.

En sommant $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve : $-1 - p_2 + p_1 < 0 < 1 + p_1 - p_2$ et donc $-1 < p_2 - p_1 < 1$.

Puisque $p_2 - p_1 \in \mathbb{Z}$, on a nécessairement $p_2 - p_1 = 0$ et donc $p_1 = p_2$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le point précédent, on sait que $\lfloor 10^n x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$.

On en déduit que : $\underbrace{\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}}_{\substack{\text{valeur décimale} \\ \text{approchée à } 10^{-n} \\ \text{par défaut}}} \leq x < \underbrace{\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}}_{\substack{\text{valeur décimale} \\ \text{approchée à } 10^{-n} \\ \text{par excès}}}$, puis que $0 \leq x - \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} < \dfrac{1}{10^n}$.

Comme la suite $\left(\dfrac{1}{10^n}\right)$ converge vers 0, le théorème d'encadrement nous assure que la suite $\left(x - \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)$ est convergente et converge vers 0. Autrement dit la suite de nombres rationnels (même décimaux) $\left(\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)$ converge vers x.

$\square$