Programme de khôlle

Semaine 15 (4 janvier 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 8 : Suites numériques

Exercices réalisés : TD8, exercices n°2,3,4,5(1 à 4),7,8,9,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20

- Connaître les définitions de suites minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes.
- Savoir déterminer, sans conjecture/récurrence, le terme général d'une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou récurrente linéaire d'ordre deux.
- Savoir déterminer (si possible) le terme général d'une suite qui n'est pas d'un des types précédents par conjecture/récurrence.
- Connaître les définitions formalisées de limite finie ou infinie d'une suite à valeurs réelles ; connaître les notions de convergence et divergence d'une suite.
- Savoir calculer une limite grâce aux opérations sur les limites.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Montrer l'existence d'une limite par le théorème d'encadrement, de minoration, de majoration, le théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes.
- Montrer la convergence ou la divergence d'une suite par extraction (dont indice pair et impair).
- Etudier (avec des guides) une suite récurrente du type $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
- Etudier la convergence d'une suite complexe, par étude : partie réelle/partie imaginaire ou module/argument.

Chapitre 9 : Techniques de calcul d'intégrales

Exercices réalisés : TD9, exercices n°1,2,3

- Révisions : Calculer des primitives usuelles.
- Savoir calculer une intégrale ou une primitive par intégration par parties.
- Connaître et savoir utiliser les propriétés de l'intégrales : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
- Savoir étudier une suite définie par une intégrale.

Note : Pas de changement de variable cette semaine.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Théorème de la limite monotone (on traite le cas croissant majoré)*

   Montrer que toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ croissante et majorée converge vers la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2. *Partie entière d'un nombre réel et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$*

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On admet qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p+1$

   (i) Montrer qu'un tel entier p est unique.
   On l'appelle la partie entière de x on le note $\lfloor x \rfloor$.

   (ii) Montrer que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels
   (on utilisera la notion de partie entière et le théorème d'encadrement).

3. *Intégrales de Wallis*

   (i) Exprimer à l'aide de factorielles le produit des $n \in \mathbb{N}^\star$ premiers entiers pairs (non nuls) et le produit des $n \in \mathbb{N}^\star$ premiers entiers impairs.

   (ii) Déterminer le terme général de la suite d'intégrales $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. On l'exprimera à l'aide de factorielles.