Démonstrations exigibles

Semaine 15 (4 janvier 2021)

---

1. *Théorème de la limite monotone (on traite le cas croissant majoré)*

   Montrer que toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ croissante et majorée converge vers la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   Preuve : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs réelles croissante et majorée, montrons qu'elle converge.

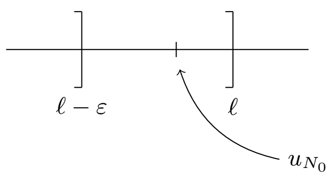
   ► L'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ (car la suite (u_n) est majorée).
   Le théorème de la borne supérieure nous assure que $\sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existe, on le note $\ell = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   ► Montrons que (u_n) converge vers ℓ.

   Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que : $\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$, i.e. $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$.

   ⋆ Comme ℓ est un majorant de la suite (u_n), on a : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$.

   ⋆ Comme ℓ est le plus petit des majorants de la suite (u_n), on a : $\exists N_0 \in \mathbb{N},\quad \ell - \varepsilon < u_{N_0}$.



   Un tel élément u_{N_0} existe bien car :

   s'il n'existait aucun terme de la suite (u_n) dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon ; \ell]$,
   le réel $\ell - \varepsilon$ serait un majorant de (u_n) strictement plus petit que ℓ,
   ce qui est impossible.

   ⋆ Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \geq N_0,\ \ell - \varepsilon < u_{N_0} \leq u_n$.

   Donc, on obtient : $\forall n \geq N_0,\quad \ell - \varepsilon < u_{N_0} \leq u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$.

   On en déduit : $\forall n \geq N_0,\quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui conclut la preuve.

$\square$

2. *Partie entière d'un nombre réel et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On admet qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p+1$

(i) Montrer qu'un tel entier p est unique. On l'appelle la partie entière de x on le note $\lfloor x \rfloor$.

(ii) Montrer que x est limite d'une suite de nombres rationnels (on utilisera la notion de partie entière et le théorème d'encadrement).

Preuve :

(i) Montrons l'unicité d'un entier p tel que $p \leq x < p+1$.

Soient p_1 et p_2 deux entiers tels que : $\begin{cases} p_1 \leq x < p_1 + 1 \ (\star) \\ p_2 \leq x < p_2 + 1 \quad \text{ou encore} \quad -p_2 - 1 < -x \leq -p_2 \ (\star\star) \end{cases}$.

En sommant $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve : $-1 - p_2 + p_1 < 0 < 1 + p_1 - p_2$ et donc $-1 < p_2 - p_1 < 1$.

Puisque $p_2 - p_1 \in \mathbb{Z}$, on a nécessairement $p_2 - p_1 = 0$ et donc $p_1 = p_2$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le point précédent, on sait que $\lfloor 10^n x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$.

On en déduit que : $\underbrace{\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}}_{\substack{\text{valeur décimale} \\ \text{approchée à } 10^{-n} \\ \text{par défaut}}} \leq x < \underbrace{\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}}_{\substack{\text{valeur décimale} \\ \text{approchée à } 10^{-n} \\ \text{par excès}}}$, puis que $0 \leq x - \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} < \dfrac{1}{10^n}$.

Comme la suite $\left(\dfrac{1}{10^n}\right)$ converge vers 0, le théorème d'encadrement nous assure que la suite $\left(x - \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)$ est convergente et converge vers 0. Autrement dit la suite de nombres rationnels (même décimaux) $\left(\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)$ converge vers x.

$\square$

3. *Intégrales de Wallis*

(i) Exprimer à l'aide de factorielles le produit des $n \in \mathbb{N}^\star$ premiers entiers pairs (non nuls) et le produit des $n \in \mathbb{N}^\star$ premiers entiers impairs.

(ii) Déterminer le terme général de la suite d'intégrales $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de la parité de n. On l'exprimera à l'aide de factorielles.

Preuve :

(i) Soit $p \in \mathbb{N}^\star$.

- Le produit des p premiers entiers pairs (non nuls) est :

$$2 \times 4 \times 8 \times \ldots \times (2p-2) \times (2p) = \overbrace{(2\times 1)\times(2\times 2)\times(2\times 3)\times\ldots\times(2\times(p-1))\times(2\times p)}^{\text{le facteur 2 apparaît } p \text{ fois}} = 2^p\,p!$$

- Le produit des p premiers entiers impairs est :

$$\begin{aligned}1\times 3\times 5\times\ldots\times(2p-3)\times(2p-1) &= \frac{\overbrace{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times\ldots\times(2p-2)\times(2p-3)\times(2p-1)\times(2p)}^{(2p)!}}{\underbrace{2\times 4\times 8\times\ldots\times(2p-2)\times(2p)}_{\text{produit des entiers pairs}}}\\ &= \frac{(2p)!}{2^p\,p!}\end{aligned}$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. On a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$.

On considère les fonctions : $\begin{cases} f : t \mapsto -\cos(t) & g : t \mapsto \sin^{n-1}(t) \\ f' : t \mapsto \sin(t) & g' : t \mapsto (n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t) \end{cases}$.

Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Par IPP, on a

$$\begin{aligned} W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\times(n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)(W_{n-2}-W_n). \end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}, \quad W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}}$.

De plus, $\quad W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ et $\quad W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

- Cas pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$:

La relation de récurrence nous assure que

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2} \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)\ldots 3.1}{(2p)(2p-2)(2p-4)\ldots 4.2}W_0 \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p\,p!)^2}\,\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{4^p\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ par récurrence immédiate $\longrightarrow$

- Cas impair, $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$:

La relation de récurrence nous assure que

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1}W_{2p-1} \\ &= \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)\ldots 4.2}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\ldots 5.3}W_1 \\ &= \frac{(2^p\,p!)^2}{(2p+1)(2p)!} \\ &= \frac{4^p\,(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

On obtient les formules de Wallis : $\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}}$ $\quad$ et $\quad$ $\boxed{W_{2p+1} = \frac{4^p\,(p!)^2}{(2p+1)!}}$.