Démonstrations exigibles

Semaine 16 (11 janvier 2021)

1. *Intégrales de Wallis*

   (i) Exprimer à l'aide de factorielles le produit des $n \in \mathbb{N}^\star$ premiers entiers pairs (non nuls) et le produit des $n \in \mathbb{N}^\star$ premiers entiers impairs.

   (ii) Déterminer le terme général de la suite d'intégrales $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de la parité de n. On l'exprimera à l'aide de factorielles.

Preuve :

(i) Soit $p \in \mathbb{N}^\star$.

- Le produit des p premiers entiers pairs (non nuls) est :

$$2 \times 4 \times 8 \times \ldots \times (2p-2) \times (2p) = \overbrace{(2\times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \ldots \times (2 \times (p-1)) \times (2 \times p)}^{\text{le facteur 2 apparaît } p \text{ fois}} = 2^p\, p!$$

- Le produit des p premiers entiers impairs est :

$$1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2p-3) \times (2p-1) = \frac{\overbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times (2p-2) \times (2p-3) \times (2p-1) \times (2p)}^{(2p)!}}{\underbrace{2 \times 4 \times 8 \times \ldots \times (2p-2) \times (2p)}_{\text{produit des entiers pairs}}}$$

$$= \frac{(2p)!}{2^p\, p!}$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. On a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$.

On considère les fonctions : $\left\{\begin{array}{ll} f : t \mapsto -\cos(t) & g : t \mapsto \sin^{n-1}(t) \\ f' : t \mapsto \sin(t) & g' : t \mapsto (n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t) \end{array}\right.$.

Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Par IPP, on a

$$\begin{aligned} W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t) \times (n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)(W_{n-2} - W_n). \end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}, \quad W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}}$.

De plus, $\quad W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad$ et $\quad W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

• <u>Cas pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$:</u>

La relation de récurrence nous assure que

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)\dots 3.1}{(2p)(2p-2)(2p-4)\dots 4.2} W_0 \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{4^p\, (p!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ par récurrence immédiate $\longrightarrow$

• <u>Cas impair, $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$:</u>

La relation de récurrence nous assure que

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} \\ &= \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)\dots 4.2}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\dots 5.3} W_1 \\ &= \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)(2p)!} \\ &= \frac{4^p\, (p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

<u>On obtient les formules de Wallis :</u> $\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p\, (p!)^2} \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_{2p+1} = \frac{4^p\, (p!)^2}{(2p+1)!}}$.

□

2. *Théorème de changement de variable*

Enoncer puis démontrer le théorème de changement de variable dans une intégrale.

Enoncé : Soient f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ à valeurs dans I. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve :

- La fonction f étant continue sur I, elle possède des primitives sur I. On note F l'une d'entre elles.
- La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ à valeurs dans I :
  - ⋆ la fonction $F \circ \varphi$ est bien définie, dérivable sur $[a;b]$ et on a :

$$\forall t \in [a;b], \quad (F \circ \varphi)'(t) = (F' \circ \varphi)(t)\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

  - ⋆ les fonctions $f \circ \varphi$ et φ' sont continues sur $[a;b]$, donc $(F \circ \varphi)'$ est continue sur $[a;b]$ et $F \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$.
- On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [F(\varphi(t))]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

  Ce qui conclut la preuve.

□

3. *Lois de De Morgan*

Enoncer puis démontrer les deux lois de De Morgan.

Enoncé : Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

Les lois de De Morgan sont données par

(i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Preuve :

(i) Montrons que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Soit $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Longleftrightarrow \text{NON}\,(x \in A \cap B) \\ &\Longleftrightarrow \text{NON}\,(x \in A \ \text{ ET } \ x \in B) \\ &\Longleftrightarrow \text{NON}\,(x \in A) \quad \text{OU} \quad \text{NON}\,(x \in B) \\ &\Longleftrightarrow x \in \overline{A} \ \text{ OU } \ x \in \overline{B} \\ &\Longleftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Donc $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(ii) Montrons que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

On note $C = \overline{A}$ et $D = \overline{B}$. En utilisant (i), on a $\overline{C \cap D} = \overline{C} \cup \overline{D}$ ou encore : $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$.

En prenant les complémentaires, on obtient :

$$\overline{A \cup B} = \overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Cela conclut la preuve.

$\square$