Démonstrations exigibles

Semaine 17 (18 janvier 2021)

---

1. *Théorème de changement de variable*

   Enoncer puis démontrer le théorème de changement de variable dans une intégrale.

   Enoncé : Soient f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ à valeurs dans I. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Preuve :

   - La fonction f étant continue sur I, elle possède des primitives sur I. On note F l'une d'entre elles.
   - La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ à valeurs dans I :
     - ⋆ la fonction $F \circ \varphi$ est bien définie, dérivable sur $[a;b]$ et on a :

$$\forall t \in [a;b], \quad (F \circ \varphi)'(t) = (F' \circ \varphi)(t)\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

     - ⋆ les fonctions $f \circ \varphi$ et φ' sont continues sur $[a;b]$, donc $(F \circ \varphi)'$ est continue sur $[a;b]$ et $F \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$.
   - On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [F(\varphi(t))]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

     Ce qui conclut la preuve.

$\square$

2. *Lois de De Morgan*

Enoncer puis démontrer les deux lois de De Morgan.

Enoncé : Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

Les lois de De Morgan sont données par

(i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Preuve :

(i) Montrons que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Soit $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff \text{NON}\,(x \in A \cap B) \\ &\iff \text{NON}\,(x \in A \ \text{ ET } \ x \in B) \\ &\iff \text{NON}\,(x \in A) \quad \text{OU} \ \ \text{NON}\,(x \in B) \\ &\iff x \in \overline{A} \ \text{ OU } \ x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Donc $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(ii) Montrons que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

On note $C = \overline{A}$ et $D = \overline{B}$. En utilisant (i), on a $\overline{C \cap D} = \overline{C} \cup \overline{D}$ ou encore : $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$.

En prenant les complémentaires, on obtient :

$$\overline{A \cup B} = \overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Cela conclut la preuve.

$\square$

3. *Composée d'applications injectives, surjectives*

(i) Montrer qu'une composée d'applications injectives est injective.

(ii) Montrer qu'une composée d'applications surjectives est surjective.

Preuve : Soient E, F, G trois ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $g \in \mathscr{F}(F, G)$:

(i) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

Supposons f et g injectives et montrons que $g \circ f$ est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\implies g(\overbrace{f(x_1)}^{\in F}) = g(\overbrace{f(x_2)}^{\in F}) \\ &\implies f(x_1) = f(x_2) \quad \text{[par injectivité de } g\text{]} \\ &\implies x_1 = x_2 \quad \text{[par injectivité de } f\text{].}\end{aligned}$$

D'où $g \circ f$ injective.

(ii) Montrons que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Supposons f et g surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$.

- Par surjectivité de g, il existe $y \in F$, tel que $z = g(y)$.
- Par sujectivité de f, il existe $x \in E$, tel que $y = f(x)$.

Donc $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ et $g \circ f$ surjective.

$\square$