Programme de khôlle

Semaine 18 (25 janvier 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 10 : Ensembles et applications

Exercices réalisés : TD10, exercices n° 1,2(1.2.3.4.),3,4,5,7,8,9,10

- Savoir utiliser les symboles d'inclusion et d'appartenance.
- Démontrer une inclusion ou une égalité d'ensembles par double inclusion : soit en revenant aux éléments, soit en utilisant les propriétés des opérateurs ensemblistes (distributivité, lois de De Morgan...)
- Connaître et savoir utiliser le vocabulaire sur les applications : ensembles de départ et d'arrivée, application identité, restriction d'une application, composée d'applications.
- Savoir déterminer l'image directe, l'image réciproque d'un ensemble par une application.
- Montrer qu'une application est (ou n'est pas) injective, surjective, bijective. Savoir exprimer ces notions en termes d'antécédents.

Chapitre 11 : Dénombrement

Exercices réalisés : TD11, exercices n° 1,3,4,5,6,8,9,10

- Savoir utiliser le vocabulaire : p-uplets (ordonné avec répétition éventuelle), p-arrangements (ordonné sans répétition), p-combinaison (sous-ensemble à p éléments, donc non ordonné et sans répétition).
- Résoudre des problèmes simples de dénombrement (tirages de boules, cartes, dés, pièces...).
- Etablir une relation en réalisant un dénombrement de plusieurs façons.
- Connaître et utiliser les propriétés des coefficients binomiaux : valeurs remarquables, symétrie, formule de Pascal, Formule du binôme.
- Savoir calculer une somme faisant intervenir des coefficients binomiaux (éventuellement à l'aide d'un dénombrement).

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Composée d'applications injectives, surjectives*

   (i) Montrer qu'une composée d'applications injectives est injective.

   (ii) Montrer qu'une composée d'applications surjectives est surjective.

2. *Preuve combinatoire de la formule de Pascal*

   Montrer à l'aide d'un dénombrement la formule de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \forall k \in [\![1\,;n]\!], \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

3. *Cardinal d'une réunion et cardinal de l'ensembles des parties*

   Soit E un ensemble. Montrer les deux résultats suivants :

   (i) Si A, $B \in \mathscr{P}(E)$ sont finis, alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

   (ii) Si E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

   Note : On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat :

   Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ sont finis et deux à deux disjoints, alors

$$Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i).$$