Démonstrations exigibles

Semaine 18 (25 janvier 2021)

1. *Composée d'applications injectives, surjectives*

   (i) Montrer qu'une composée d'applications injectives est injective.

   (ii) Montrer qu'une composée d'applications surjectives est surjective.

Preuve : Soient E, F, G trois ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $g \in \mathscr{F}(F, G)$:

(i) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

Supposons f et g injectives et montrons que $g \circ f$ est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\implies g(\overbrace{f(x_1)}^{\in F}) = g(\overbrace{f(x_2)}^{\in F}) \\ &\implies f(x_1) = f(x_2) \quad \text{[par injectivité de } g\text{]} \\ &\implies x_1 = x_2 \quad \text{[par injectivité de } f\text{]}.\end{aligned}$$

D'où $g \circ f$ injective.

(ii) Montrons que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Supposons f et g surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$.

- Par surjectivité de g, il existe $y \in F$, tel que $z = g(y)$.
- Par sujectivité de f, il existe $x \in E$, tel que $y = f(x)$.

Donc $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ et $g \circ f$ surjective.

□

2. *Preuve combinatoire de la formule de Pascal*

Montrer <u>à l'aide d'un dénombrement</u> la formule de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \forall k \in [\![1\,;n]\!], \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Preuve : Soient E fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $k \in [\![1\,;n]\!]$. On note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments, il est de cardinal $\binom{n}{k}$. On cherche donc à montrer que

$$\text{Card}(\mathscr{P}_k(E)) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

$\boxed{\text{Soit } a \in E \text{ fixé}}$. On pose :

- ⋆ A l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a ;
- ⋆ B l'ensemble des parties de E à k éléments ne contenant pas a.

On a donc $\mathscr{P}_k(E) = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Cela implique que

$$\text{Card}(\mathscr{P}_k(E)) = \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

- Montrons que $\text{Card}(A) = \binom{n-1}{k-1}$:

  Les parties à k éléments de E contenant a sont de la forme $X \cup \{a\}$ où X est une partie à $k-1$ éléments de $E \backslash \{a\}$ (qui compte $n-1$ éléments). Il y a donc $\binom{n-1}{k-1}$ telles parties et $\text{Card}(A) = \binom{n-1}{k-1}$.

- Montrons que $\text{Card}(B) = \binom{n-1}{k}$:

  Les parties à k éléments de E ne contenant pas a sont en fait les parties à k éléments de $E \backslash \{a\}$ (qui compte $n-1$ éléments). Il y a donc $\binom{n-1}{k}$ telles parties et $\text{Card}(B) = \binom{n-1}{k}$.

En fin de compte : $\binom{n}{k} = \text{Card}(\mathscr{P}_k(E)) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Cela conclut la preuve.

□

3. *Cardinal d'une réunion et cardinal de l'ensemble des parties*

Soit E un ensemble. Montrer les deux résultats suivants :

(i) Si $A,\ B \in \mathscr{P}(E)$ sont finis, alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

(ii) Si E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Note : On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat :

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ sont finis et deux à deux disjoints, alors

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \textit{est fini} \quad \textit{et} \quad \textit{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \textit{Card}(A_i).$$

Preuve :

(i) Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$ finis.

- On a $A \cup B = (B \backslash A) \cup A$ et $(B \backslash A) \cap A = \emptyset$, avec $B \backslash A \subset B$ et A finis donc :
  $A \cup B$ est fini et $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(B \backslash A) + \text{Card}(A)$.
- On a également : $B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$ et $(B \backslash A) \cap (A \cap B) = \emptyset$,
  donc : $\text{Card}(B) = \text{Card}(B \backslash A) + \text{Card}(A \cap B)$ i.e. $\text{Card}(B \backslash A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

D'où :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(B \backslash A) + \text{Card}(A) \\
&= (\text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)) + \text{Card}(A) \\
&= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)).
\end{aligned}$$

(ii) Soit E fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments, il est fini de cardinal $\binom{n}{k}$.

Comme $\mathscr{P}(E) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$ et $\mathscr{P}_k(E) \cap \mathscr{P}_{k'}(E) = \emptyset$ pour tout $(k, k') \in [\![0\,;n]\!]^2$ tel que $k \neq k'$, on en déduit que :

- $\mathscr{P}(E)$ est fini ;
- $$\begin{aligned}
\text{Card}(\mathscr{P}(E)) &= \text{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(\mathscr{P}_k(E)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\
&= (1+1)^n \quad \text{[Par la formule du binôme de Newton]} \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

$\square$