Programme de khôlle

Semaine 19 (1 février 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 11 : Dénombrement

Exercices réalisés : TD11, exercices n°1,3,4,5,6,8,9,10

- Savoir utiliser le vocabulaire : p-uplets (ordonné avec répétition éventuelle), p-arrangements (ordonné sans répétition), p-combinaison (sous-ensemble à p éléments, donc non ordonné et sans répétition).
- Résoudre des problèmes simples de dénombrement (tirages de boules, cartes, dés, pièces...).
- Etablir une relation en réalisant un dénombrement de plusieurs façons.
- Connaître et utiliser les propriétés des coefficients binomiaux : valeurs remarquables, symétrie, formule de Pascal, Formule du binôme.
- Savoir calculer une somme faisant intervenir des coefficients binomiaux (éventuellement à l'aide d'un dénombrement).

Chapitre 12 : Limites et continuité

Exercices réalisés : TD12, exercices n°1,3(1,2,3),4(1,2),5(1a,2,3,4)

- Savoir montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point (par limite à gauche, à droite, ou par caractérisation séquentielle)
- Savoir calculer des limites par opérations, croissances comparées, encadrement, reconnaissance d'un taux d'accroissement.
- Savoir montrer l'existence d'une limite par les théorèmes de la limite monotone, minoration, majoration...
- Etudier la continuité d'une fonction (éventuellement à gauche et à droite). Savoir la prolonger éventuellement par continuité.
- Résoudre des équations fonctionnelles par analyse-synthèse sous hypothèse de continuité.
- Savoir utiliser le TVI (existence d'une solution à une équation), ou le théorème des bornes atteintes (existence d'un extremum).

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Preuve combinatoire de la formule de Pascal*

   Montrer <u>à l'aide d'un dénombrement</u> la formule de Pascal :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \forall k \in [\![1\,;n]\!], \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

2. *Cardinal d'une réunion et cardinal de l'ensembles des parties*

   Soit E un ensemble. Montrer les deux résultats suivants :

   (i) Si A, $B \in \mathscr{P}(E)$ sont finis, alors $A \cup B$ est fini et

   $$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

   (ii) Si E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

   Note : On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat :

   Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ sont finis et deux à deux disjoints, alors

   $$Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i).$$

3. *Composition des limites*

   Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ (I,J intervalles) telles que $f(I) \subset J$.
   Soient $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

   Montrer que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$ alors $g \circ f$ possède une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

   Note : On traitera le cas où $a, b, \ell \in \mathbb{R}$.

4. *Application du TVI à un problème de point fixe*

   (i) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

   (ii) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \to [a; b]$ continue.

   Montrer que f possède un point fixe.