Démonstrations exigibles

Semaine 19 (1 février 2021)

---

1. *Preuve combinatoire de la formule de Pascal*

   Montrer à l'aide d'un dénombrement la formule de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \forall k \in [\![1\,;n]\!], \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

   Preuve : Soient E fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $k \in [\![1\,;n]\!]$. On note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments, il est de cardinal $\binom{n}{k}$. On cherche donc à montrer que

$$\text{Card}(\mathscr{P}_k(E)) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

   $\boxed{\text{Soit } a \in E \text{ fixé}}$. On pose :

   - ⋆ A l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a ;
   - ⋆ B l'ensemble des parties de E à k éléments ne contenant pas a.

   On a donc $\mathscr{P}_k(E) = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Cela implique que

$$\text{Card}(\mathscr{P}_k(E)) = \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

   - Montrons que $\text{Card}(A) = \binom{n-1}{k-1}$:

     Les parties à k éléments de E contenant a sont de la forme $X \cup \{a\}$ où X est une partie à $k-1$ éléments de $E \backslash \{a\}$ (qui compte $n-1$ éléments). Il y a donc $\binom{n-1}{k-1}$ telles parties et $\text{Card}(A) = \binom{n-1}{k-1}$.

   - Montrons que $\text{Card}(B) = \binom{n-1}{k}$:

     Les parties à k éléments de E ne contenant pas a sont en fait les parties à k éléments de $E \backslash \{a\}$ (qui compte $n-1$ éléments). Il y a donc $\binom{n-1}{k}$ telles parties et $\text{Card}(B) = \binom{n-1}{k}$.

   En fin de compte : $\binom{n}{k} = \text{Card}(\mathscr{P}_k(E)) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

   Cela conclut la preuve.

□

2. *Cardinal d'une réunion et cardinal de l'ensemble des parties*

Soit E un ensemble. Montrer les deux résultats suivants :

(i) Si $A,\, B \in \mathscr{P}(E)$ sont finis, alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

(ii) Si E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Note : On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat :

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(E)$ sont finis et deux à deux disjoints, alors

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \textit{est fini} \quad \textit{et} \quad \textit{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \textit{Card}(A_i).$$

Preuve :

(i) Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$ finis.

- On a $A \cup B = (B \backslash A) \cup A$ et $(B \backslash A) \cap A = \emptyset$, avec $B \backslash A \subset B$ et A finis donc :
  $A \cup B$ est fini et $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(B \backslash A) + \text{Card}(A)$.
- On a également : $B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$ et $(B \backslash A) \cap (A \cap B) = \emptyset$,
  donc : $\text{Card}(B) = \text{Card}(B \backslash A) + \text{Card}(A \cap B)$ i.e. $\text{Card}(B \backslash A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

D'où :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(B \backslash A) + \text{Card}(A) \\
&= (\text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)) + \text{Card}(A) \\
&= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)).
\end{aligned}$$

(ii) Soit E fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, on note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments, il est fini de cardinal $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Comme $\mathscr{P}(E) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$ et $\mathscr{P}_k(E) \cap \mathscr{P}_{k'}(E) = \emptyset$ pour tout $(k, k') \in [\![0\,; n]\!]^2$ tel que $k \neq k'$, on en déduit que :

- $\mathscr{P}(E)$ est fini ;
- $$\begin{aligned}
\text{Card}(\mathscr{P}(E)) &= \text{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(\mathscr{P}_k(E)\right) \quad \text{[Car les } \mathscr{P}_k(E) \text{ sont deux à deux disjoints]} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 1^k 1^{n-k} \\
&= (1+1)^n \quad \text{[Par la formule du binôme de Newton]} \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

□

3. *Composition des limites*

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ (I,J intervalles) tels que $f(I) \subset J$.

Soient $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Montrer que si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(y) = \ell$ alors $g \circ f$ possède une limite en a et $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

Note : On traitera le cas où $a, b, \ell \in \mathbb{R}$.

Preuve : On traite le cas où $a, b, \ell \in \mathbb{R}$.

Montrons que $g \circ f$ admet ℓ pour limite en a. Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Comme $\lim_{y \to b} g(y) = \ell$: $\exists \delta > 0,\ \forall y \in J \cap [b - \delta; b + \delta],\ |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$.
On fixe un tel $\delta > 0$.

(ii) Comme $\lim_{x \to a} f(x) = b$: $\exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap [a - \eta; a + \eta],\ |f(x) - b| \leq \delta$ i.e. $f(x) \in [b - \delta; b + \delta]$.
On fixe un tel $\eta > 0$.

(iii) Enfin, comme $f(I) \subset J$ (i.e. $\forall x \in I,\ f(x) \in J$), on a : $\forall x \in I \cap [a - \eta; a + \eta],\ f(x) \in J \cap [b - \delta; b + \delta]$.

En conclusion : en combinant les points (i) et (iii), on obtient que :

$$\forall x \in I \cap [a - \eta; a + \eta],\ |g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Donc $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

$\square$

4. *Application du TVI à un problème de point fixe*

   (i) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

   (ii) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \to [a; b]$ continue.

   Montrer que f possède un point fixe.

Preuve :

(i) *Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)*

Soient I un <u>intervalle</u>, $f : I \to \mathbb{R}$ <u>continue</u> et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Soit γ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

(ii) Par définition de f on a, pour tout $x \in [a; b]$, $a \leq f(x) \leq b$. En particulier $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ continue sur l'intervalle $[a; b]$ comme différence de deux fonctions continues. Comme $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$, le TVI appliqué à la fonction g entre a et b nous assure qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$, i.e. $f(c) = c$. Donc f admet bien (au moins) un point fixe sur $[a; b]$.

$\square$