Programme de khôlle

Semaine 20 (8 février 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 12 : Limites et continuité

Exercices réalisés : TD12, exercices n°1,3(1,2,3),4(1,2),5(1a,2,3,4)

- Savoir montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point (par limite à gauche, à droite, ou par caractérisation séquentielle)
- Savoir calculer des limites par opérations, croissances comparées, encadrement, reconnaissance d'un taux d'accroissement.
- Savoir montrer l'existence d'une limite par les théorèmes de la limite monotone, minoration, majoration...
- Etudier la continuité d'une fonction (éventuellement à gauche et à droite). Savoir la prolonger éventuellement par continuité.
- Résoudre des équations fonctionnelles par analyse-synthèse sous hypothèse de continuité.
- Savoir utiliser le TVI (existence d'une solution à une équation), ou le théorème des bornes atteintes (existence d'un extremum).

Chapitre 13 : Matrices

Exercices réalisés : TD13, exercices n°2,3,5,6,7,9,10

- Savoir manipuler une matrice à n lignes et p colonnes, sa transposée. Connaître les matrices élémentaires E_{ij}.
- Savoir effectuer des opérations sur des matrices (addition, multiplication par un scalaire, multiplication matricielle) et connaître leurs propriétés algébriques.
- Connaître les matrices carrées usuelles (identité, nulle, diagonales, triangulaires supérieures et inférieures, symétriques et antisymétriques, nilpotentes).
- Savoir déterminer les puissances d'une matrice par : récurrence, formule du binôme, par diagonalisation (avec matrice de passage donnée)...
- Savoir appliquer à l'étude de système de suites.
- Déterminer si une matrice est inversible (à l'aide du déterminant <u>dans le cas $n = 2$</u>, avec le rang dans le cas général) et, le cas échéant, déterminer son inverse (formule de Cramer dans le cas $n = 2$, dans le cas général : résolution d'un système ou opérations élémentaires sur la matrice augmentée $[A|I_n]$ au choix).

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Composition des limites*

   Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ (I,J intervalles) telles que $f(I) \subset J$.
   Soient $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

   Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ alors $g \circ f$ possède une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

   Note : On traitera le cas où $a, b, \ell \in \mathbb{R}$.

2. *Application du TVI à un problème de point fixe*

   (i) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

   (ii) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \to [a; b]$ continue.
   Montrer que f possède un point fixe.

3. *Autour du produit matriciel*

   Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

   (a) Rappeler la définition du produit des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

   (b) Montrer que le produit matriciel est associatif, i.e.

   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

4. *Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice en terme de système*

Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

(ii) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution.