# Démonstrations exigibles

## Semaine 19 (1 février 2021)

---

1. *Composition des limites*

   Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ ($I$,$J$ intervalles) tels que $f(I) \subset J$.
   Soient $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

   Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ alors $g \circ f$ possède une limite en $a$ et $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = \ell$.

   *Note : On traitera le cas où* $a, b, \ell \in \mathbb{R}$.

   *Preuve :* On traite le cas où $a, b, \ell \in \mathbb{R}$.

   Montrons que $g \circ f$ admet $\ell$ pour limite en $a$. Soit $\varepsilon > 0$.

   (i) Comme $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ : $\exists \delta > 0,\ \forall y \in J \cap [b-\delta; b+\delta],\ |g(y) - \ell| \leq \varepsilon.$
   On fixe un tel $\delta > 0$.

   (ii) Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ : $\exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\eta; a+\eta],\ |f(x) - b| \leq \delta$ i.e. $f(x) \in [b-\delta; b+\delta]$.
   On fixe un tel $\eta > 0$.

   (iii) Enfin, comme $f(I) \subset J$ (i.e. $\forall x \in I,\ f(x) \in J$), on a : $\forall x \in I \cap [a-\eta; a+\eta],\ f(x) \in J \cap [b-\delta; b+\delta]$.

   En conclusion : en combinant les points (i) et (iii), on obtient que :

   $$\forall x \in I \cap [a-\eta; a+\eta],\ |g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon.$$

   Donc $g \circ f$ admet une limite en $a$ et $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = \ell$.

   □

2. *Application du TVI à un problème de point fixe*

   (i) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

   (ii) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \to [a; b]$ continue.

   Montrer que $f$ possède un point fixe.

*Preuve :*

(i) *Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)*

Soient $I$ un <u>intervalle</u>, $f : I \to \mathbb{R}$ <u>continue</u> et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.
Soit $\gamma$ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

(ii) Par définition de $f$ on a, pour tout $x \in [a; b]$, $a \leq f(x) \leq b$. En particulier $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ continue sur l'intervalle $[a; b]$ comme différence de deux fonctions continues. Comme $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$, le TVI appliqué à la fonction $g$ entre $a$ et $b$ nous assure qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$, i.e. $f(c) = c$. Donc $f$ admet bien (au moins) un point fixe sur $[a; b]$.

$\square$

3. *Autour du produit matriciel*

Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

(a) Rappeler la définition du produit $A \times B$ des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que le produit matriciel est associatif, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\, \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\, \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

*Preuve :*

(a) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A \times B = C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

(b) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

Montrons que : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;r]\!], \quad [(A \times B) \times C]_{i,j} = [A \times (B \times C)]_{i,j}$.

Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;r]\!]$.

- D'une part :

$$\begin{aligned}
[(A \times B) \times C]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q} [A \times B]_{i,k}\ c_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{q} \left( \sum_{s=1}^{p} a_{i,s}\, b_{s,k} \right) c_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{q} \sum_{s=1}^{p} a_{i,s}\, b_{s,k}\, c_{k,j}.
\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
[A \times (B \times C)]_{i,j} &= \sum_{s=1}^{p} a_{i,s}\ [B \times C]_{s,j} \\
&= \sum_{s=1}^{p} a_{i,s} \left( \sum_{k=1}^{q} b_{s,k}\, c_{k,j} \right) \\
&= \sum_{s=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{i,s}\, b_{s,k}\, c_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{q} \sum_{s=1}^{p} a_{i,s}\, b_{s,k}\, c_{k,j}.
\end{aligned}$$

Ainsi $[(A \times B) \times C]_{i,j} = [A \times (B \times C)]_{i,j}$, ce qui conclut la preuve.

$\square$

4. *Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice en terme de système*

Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(ii) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution.

*Preuve :* Raisonnons par double implication.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Donc le système $AX = B$ possède une unique solution qui est $X = A^{-1}B$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution.

Montrons qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = CA = I_n$.

⋆ On cherche $C = [C_1 \mid \dots \mid C_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AC = [AC_1 \mid \dots \mid AC_n] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array} \end{array} = I_n.$$

Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, il suffit de définir la matrice colonne $C_j$ comme étant l'unique solution du système $AX = e_j$.
Dans ce cas $C = [C_1 \mid \dots \mid C_n]$ vérifie $AC = I_n$.

⋆ Montrons que $CA = I_n$ :

On a $A(CA - I_n) = (AC)A - A = I_n A - A = 0_n$.
En notant, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $\widetilde{C}_j$ la $j$-ième colonne de la matrice $CA - I_n$, on a

$$A(CA - I_n) = 0_n \Leftrightarrow \left[A\widetilde{C}_1 \middle| \dots \middle| A\widetilde{C}_n\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in [\![1; n]\!], \quad A\widetilde{C}_j = 0_{n,1}.$$

Or le système $AX = 0_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution qui est $X = 0_{n,1}$.
Donc, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $\widetilde{C}_j = 0_{n,1}$.
On en déduit que $CA - I_n = 0_n$ puis que $CA = I_n$.

En conclusion, on a construit une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = CA = I_n$, donc $A$ est inversible d'inverse $C$.

□