Programme de khôlle

Semaine 21 (15 février 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 13 : Matrices

Exercices réalisés : TD13, exercices n°2,3,5,6,7,9,10

- Savoir manipuler une matrice à n lignes et p colonnes, sa transposée. Connaître les matrices élémentaires E_{ij}.
- Savoir effectuer des opérations sur des matrices (addition, multiplication par un scalaire, multiplication matricielle) et connaître leurs propriétés algébriques.
- Connaître les matrices carrées usuelles (identité, nulle, diagonales, triangulaires supérieures et inférieures, symétriques et antisymétriques, nilpotentes).
- Savoir déterminer les puissances d'une matrice par : récurrence, formule du binôme, par diagonalisation (avec matrice de passage donnée)...
- Savoir appliquer à l'étude de système de suites.
- Déterminer si une matrice est inversible (à l'aide du déterminant dans le cas $n = 2$, avec le rang dans le cas général) et, le cas échéant, déterminer son inverse (formule de Cramer dans le cas $n = 2$, dans le cas général : résolution d'un système ou opérations élémentaires sur la matrice augmentée $[A|I_n]$ au choix).

Chapitre 14 : Dérivabilité

Exercices réalisés : TD12, exercices n°1,3(1,2 f),4(1),7,8,9,10

- Savoir étudier la dérivabilité d'une fonction (éventuellement à droite et à gauche) et déterminer le nombre dérivée. L'interpréter graphiquement.
- Savoir étudier le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une fonction (éventuellement avec le théorème de la limite de la dérivée).
- Savoir calculer les dérivées successives d'une fonction, par récurrence immédiate, par opérations (utilisation de la formule de Leibniz).
- Savoir étudier la classe d'une fonction.
- Utiliser le théorème des accroissements finis.
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour étudier des suites récurrentes.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Autour du produit matriciel*

   Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

   (a) Rappeler la définition du produit des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

   (b) Montrer que le produit matriciel est associatif, i.e.

   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

2. *Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice en terme de système*

   Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

   (ii) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution.

3. *Théorème de Rolle*

   (a) Enoncer le théorème donnant une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local.

   (b) Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

4. *Théorème de la limite de la dérivée*

   Enoncer le théorème suivant puis le démontrer.

Théorème :

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \backslash \{a\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

Ainsi :

- Si ℓ est finie ($\ell \in \mathbb{R}$), alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et, de plus, f' est continue en a.
- Si $\ell \in \{+\infty; -\infty\}$, alors f n'est pas dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a.