Démonstrations exigibles

Semaine 21 (15 février 2021)

---

1. *Autour du produit matriciel*

Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

(a) Rappeler la définition du produit $A \times B$ des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que le produit matriciel est associatif, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Preuve :

(a) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A \times B = C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

(b) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

Montrons que : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;r]\!], \quad [(A \times B) \times C]_{i,j} = [A \times (B \times C)]_{i,j}$.

Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;r]\!]$.

- D'une part :

$$\begin{aligned} [(A \times B) \times C]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q} [A \times B]_{i,k}\ c_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{s=1}^{p} a_{i,s}\, b_{s,k} \right) c_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{s=1}^{p} a_{i,s}\, b_{s,k}\, c_{k,j}. \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} [A \times (B \times C)]_{i,j} &= \sum_{s=1}^{p} a_{i,s}\ [B \times C]_{s,j} \\ &= \sum_{s=1}^{p} a_{i,s} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{s,k}\, c_{k,j} \right) \\ &= \sum_{s=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{i,s}\, b_{s,k}\, c_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{s=1}^{p} a_{i,s}\, b_{s,k}\, c_{k,j}. \end{aligned}$$

Ainsi $[(A \times B) \times C]_{i,j} = [A \times (B \times C)]_{i,j}$, ce qui conclut la preuve.

$\square$

2. *Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice en terme de système*

Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(ii) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution.

Preuve : Raisonnons par double implication.

<u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u> : Supposons que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Donc le système $AX = B$ possède une unique solution qui est $X = A^{-1}B$.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u> : Supposons que pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution.

Montrons qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = CA = I_n$.

- $\star$ On cherche $C = [C_1 \mid \dots \mid C_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AC = [AC_1 \mid \dots \mid AC_n] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right] = I_n.$$
$$e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n$$

Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, il suffit de définir la matrice colonne C_j comme étant l'unique solution du système $AX = e_j$.

Dans ce cas $C = [C_1 \mid \dots \mid C_n]$ vérifie $AC = I_n$.

- $\star$ Montrons que $CA = I_n$:

On a $A(CA - I_n) = (AC)A - A = I_nA - A = 0_n$.

En notant, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $\widetilde{C}_j$ la j-ième colonne de la matrice $CA - I_n$, on a

$$A(CA - I_n) = 0_n \Leftrightarrow \left[A\widetilde{C}_1 \middle| \dots \middle| A\widetilde{C}_n\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array}\right]$$
$$\Leftrightarrow \forall j \in [\![1;n]\!], \quad A\widetilde{C}_j = 0_{n,1}.$$

Or le système $AX = 0_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution qui est $X = 0_{n,1}$.

Donc, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $\widetilde{C}_j = 0_{n,1}$.

On en déduit que $CA - I_n = 0_n$ puis que $CA = I_n$.

En conclusion, on a construit une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = CA = I_n$, donc A est inversible d'inverse C.

$\square$

3. *Théorème de Rolle*

   (a) Enoncer le théorème donnant une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local.

   (b) Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Enoncé des résultats :

(a) *Condition nécessaire d'extremum local :*

Soient I un intervalle, $\boxed{a \in \overset{o}{I}}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

Si f possède un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

(b) *Théorème de Rolle*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soient $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve du théorème de Rolle :

- Cas où f est constante sur $[a; b]$

  Dans ce cas : $\forall x \in]a; b[, \ f'(x) = 0$ et le théorème est démontré.

- Cas où f est non constante sur $[a; b]$

  Puisque f est continue sur $[a; b]$, f est bornée et atteint ses bornes sur $[a; b]$. Autrement dit, il existe $(\alpha, \beta) \in [a; b]^2$ tel que :

$$\forall x \in [a; b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

  Il est certain que $\alpha \in]a; b[$ ou $\beta \in]a; b[$. En effet, si α et β sont des extrémités de $[a; b]$ (donc a ou b), on aurait :
  $f(\alpha) = f(a) = f(b) = f(\beta)$, et f serait constante sur $[a; b]$, ce qui est exclu.
  Puisqu'un des extremums ($f(\alpha)$ ou $f(\beta)$) est obtenu en un point intérieur où f est dérivable, on sait par le théorème (a) précédent que la dérivée de f s'annule en ce point.

Cela conclut la preuve.

$\square$

4. *Théorème de la limite de la dérivée*

Enoncer le théorème suivant puis le démontrer.

Théorème :

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{a\}$.

Si $\lim_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

Ainsi :

- Si ℓ est finie ($\ell \in \mathbb{R}$), alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et, de plus, f' est continue en a.
- Si $\ell \in \{+\infty; -\infty\}$, alors f n'est pas dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a.

Preuve :

- On sait que f est continue sur I et f est dérivable sur $I\backslash\{a\}$.

  Ainsi pour tout $x \in I\backslash\{a\}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f entre a et x.

  Il existe donc $c_x \in]a; x[$ (ou $]x; a[$) tel que
  $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$
  De plus $0 \leq |c_x - a| \leq |x - a|$ et $|x - a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ donc le théorème d'encadrement nous assure que $|c_x - a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, i.e. $c_x \underset{x\to a}{\longrightarrow} a$.
- On sait également que $\lim_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

  Ainsi par composition des limites, on obtient :
  $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$
  Ce qui conclut la preuve.

$\square$