Démonstrations exigibles

Semaine 22 (8 mars 2021)

---

1. *Théorème de Rolle*

   (a) Enoncer le théorème donnant une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local.

   (b) Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

   Enoncé des résultats :

   (a) *Condition nécessaire d'extremum local :*

   Soient I un intervalle, $\boxed{a \in \overset{o}{I}}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
   Si f possède un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

   (b) *Théorème de Rolle*

   Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soient $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
   Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

   Preuve du théorème de Rolle :

   - Cas où f est constante sur $[a; b]$

     Dans ce cas : $\forall x \in]a; b[, \ f'(x) = 0$ et le théorème est démontré.

   - Cas où f est non constante sur $[a; b]$

     Puisque f est continue sur $[a; b]$, f est bornée et atteint ses bornes sur $[a; b]$. Autrement dit, il existe $(\alpha, \beta) \in [a; b]^2$ tel que :

     $$\forall x \in [a; b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

     Il est certain que $\alpha \in]a; b[$ ou $\beta \in]a; b[$. En effet, si α et β sont des extrémités de $[a; b]$ (donc a ou b), on aurait :
     $f(\alpha) = f(a) = f(b) = f(\beta)$, et f serait constante sur $[a; b]$, ce qui est exclu.
     Puisqu'un des extremums ($f(\alpha)$ ou $f(\beta)$) est obtenu en un point intérieur où f est dérivable, on sait par le théorème (a) précédent que la dérivée de f s'annule en ce point.

   Cela conclut la preuve.

□

2. *Théorème de la limite de la dérivée*

Enoncer le théorème suivant puis le démontrer.

Théorème :

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \backslash \{a\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

Ainsi :

- Si ℓ est finie ($\ell \in \mathbb{R}$), alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et, de plus, f' est continue en a.
- Si $\ell \in \{+\infty; -\infty\}$, alors f n'est pas dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a.

Preuve :

- On sait que f est continue sur I et f est dérivable sur $I \backslash \{a\}$.
  Ainsi pour tout $x \in I \backslash \{a\}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f entre a et x.
  Il existe donc $c_x \in]a; x[$ (ou $]x; a[$) tel que
  $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$
  De plus $0 \leq |c_x - a| \leq |x - a|$ et $|x - a| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ donc le théorème d'encadrement nous assure que $|c_x - a| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, i.e. $c_x \underset{x \to a}{\longrightarrow} a$.
- On sait également que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
  Ainsi par composition des limites, on obtient :
  $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$
  Ce qui conclut la preuve.

$\square$

3. *Intersection de sous-espaces vectoriels*

Montrer qu'une intersection finie non vide de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Montrer, qu'en général, il n'en est pas de même pour la réunion.

Preuve : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E indexée sur I un ensemble fini non vide.

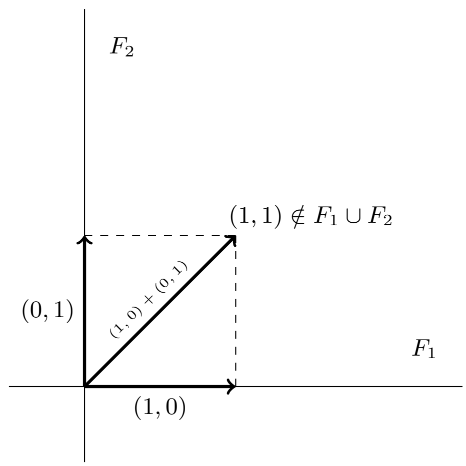
Montrons que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

- L'ensemble $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est non vide. En effet, pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E, donc $0_E \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$.
- L'ensemble $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est stable par combinaison linéaire.
  En effet, considérons $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, $\lambda x + \mu y \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E, il est donc stable par combinaison linéaire. On en déduit que $\lambda x + \mu y \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$.

Donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

En général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Par exemple, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les deux droites vectorielles $F_1 = \text{Vect}((1,0))$ et $F_2 = \text{Vect}((0,1))$. L'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par somme : $(1,0) \in F_1 \cup F_2$ et $(0,1) \in F_1 \cup F_2$ mais $(1,1) = (1,0) + (0,1) \notin F_1 \cup F_2$.



□