# Programme de khôlle

# Semaine 23 (15 mars 2021)

**La khôlle est constituée :**

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

## Chapitre 15 : Espaces vectoriels et applications linéaires

*Exercices réalisés : TD15, exercices n°1,2,3(2.3.),4,5,6(1.2.3.),8(1.2.),12,13*

- Montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en montrant :
  - que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de référence ;
  - qu'il est engendré par une famille finie de vecteurs (qu'il peut s'écrire sous la forme d'un Vect).
  - qu'il peut s'interpréter comme le noyau d'une application linéaire (qu'il peut s'écrire sous la forme d'un Ker).
- Montrer qu'un ensemble n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :
  - en revenant à la définition : $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ (i.e. $E = F \oplus G$) si et seulement si tout vecteur de $E$ se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$.
  - en utilisant la caractérisation pratique : $E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ E = F + G \end{cases}$
- Montrer qu'une application est linéaire, que c'est un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.
- Montrer qu'une application n'est pas linéaire.
- Connaître les opérations sur $\mathscr{L}(E,F)$ (en particulier la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$), sur $\mathscr{L}(E)$ (produit de composition).
- Etudier l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire (par étude de l'image, du noyau).
- Montrer qu'une application est un projecteur ou une symétrie vectorielle et savoir déterminer les sous-espaces vectoriels caractéristiques associés.

## Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Intersection de sous-espaces vectoriels*

   Montrer qu'une intersection finie non vide de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Montrer, qu'en général, il n'en est pas de même pour la réunion.

2. *Sous-espaces vectoriels supplémentaires*

   On considère l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ le sous-ensemble des fonctions paires et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.
   <u>On admet que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.</u>
   Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   Appliquer cette propriété à la fonction exponentielle.

3. *Transport de structure et caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire*

   Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

   (a) Démontrer l'un des deux points suivants (au choix de l'examinateur) :
   - Montrer que si $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.
     En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.
   - Montrer que si $H$ est un sous-espace vectoriel de $F$ alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
     En déduire que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

   (b) Puis démontrer que : $f$ injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.