Démonstrations exigibles

Semaine 23 (15 mars 2021)

1. *Intersection de sous-espaces vectoriels*

Montrer qu'une intersection finie non vide de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Montrer, qu'en général, il n'en est pas de même pour la réunion.

Preuve : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E indexée sur I un ensemble fini non vide.

Montrons que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

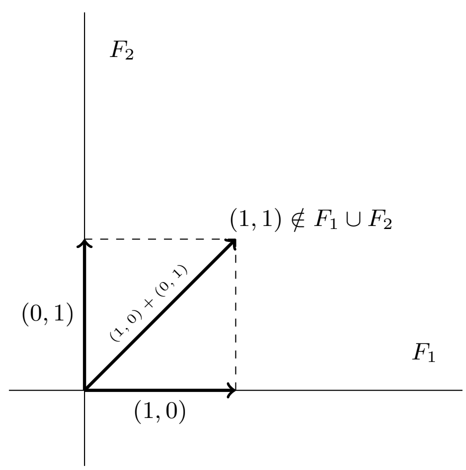
- L'ensemble $\bigcap_{i\in I} F_i$ est non vide. En effet, pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E, donc $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$.
- L'ensemble $\bigcap_{i\in I} F_i$ est stable par combinaison linéaire.

  En effet, considérons $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, $\lambda x + \mu y \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E, il est donc stable par combinaison linéaire. On en déduit que $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

Donc $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

En général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Par exemple, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les deux droites vectorielles $F_1 = \text{Vect}((1,0))$ et $F_2 = \text{Vect}((0,1))$. L'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par somme : $(1,0) \in F_1 \cup F_2$ et $(0,1) \in F_1 \cup F_2$ mais $(1,1) = (1,0) + (0,1) \notin F_1 \cup F_2$.



$\square$

2. *Sous-espaces vectoriels supplémentaires*

On considère l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ le sous-ensemble des fonctions paires et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

On admet que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Appliquer cette propriété à la fonction exponentielle.

Preuve :

- Montrons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$

  Raisonnons par analyse-synthèse et montrons que :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad \exists!(g,h) \in \mathscr{P} \times \mathscr{I}, \quad f = g + h.$$

  ⋆ *Analyse :* Supposons qu'il existe $(g,h) \in \mathscr{P} \times \mathscr{I}$ tel que $f = g + h$.

  Nécessairement, pour $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) \overset{(\star)}{=} g(x) + h(x) \\ f(-x) \overset{(\star\star)}{=} g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$

  En sommant $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve : $f(x) + f(-x) = 2g(x)$.

  En faisant la différence de $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve : $f(x) - f(-x) = 2h(x)$.

  Ainsi, nécessairement, le seul couple possible est défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

  ⋆ *Synthèse :* Réciproquement, si on considère le couple trouvé précédemment, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \quad \text{donc } g \text{ est paire};$$
$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x) \quad \text{donc } h \text{ est impaire};$$
$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x) \quad \text{donc } f = g + h.$$

  Conclusion : tout vecteur de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de $\mathscr{P}$ et d'un vecteur de $\mathscr{I}$, donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- La décomposition de la fonction $\exp$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} + \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \underbrace{\cosh}_{\in \mathscr{P}}(x) + \underbrace{\sinh}_{\in \mathscr{I}}(x).$$

□

3. *Transport de structure et caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

(a) Démontrer l'un des deux points suivants (au choix de l'examinateur) :

- Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
  En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  En déduire que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Puis démontrer que : f injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Preuve :

(a)
- Soit G un sous-espace vectoriel de E.
  Montrons que $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
  - ⋆ $f(G) \neq \emptyset$. En effet, $0_E \in G$ (car G sev de E) et $f(0_E) = 0_F$ (car f est linéaire), donc $0_F \in f(G)$.
  - ⋆ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\alpha, \beta \in f(G)$. Montrons que $\lambda\alpha + \mu\beta \in f(G)$.
    Il existe $x, y \in G$ tels que : $\alpha = f(x)$ et $\beta = f(y)$.
    $$\text{Ainsi : } \lambda\alpha + \mu\beta = \lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y) \quad \text{[car } f \text{ est linéaire]}$$
    Comme G est sous-espace de E, $\lambda x + \mu y \in G$ ainsi $\lambda\alpha + \mu\beta = f(\lambda x + \mu y) \in f(G)$.

  Conclusion : $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
  Par définition $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ est l'image de E par f.
  Or E est un sous-espace vectoriel (trivial) de E.
  Donc, par le point démontré précédemment, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Soit H un sous-espace vectoriel de F.
  Montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  - ⋆ $f^{-1}(H) \neq \emptyset$. En effet, $0_F \in H$ (car H sev de F) et $f(0_E) = 0_F$ (car f est linéaire), donc $0_E \in f^{-1}(H)$.
  - ⋆ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in f^{-1}(H)$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$.
    On a $f(x) \in H$ et $f(y) \in H$.
    Comme H est un sous-espace vectoriel de F : $\lambda f(x) + \mu f(y) \in H$.
    Comme f est linéaire : $\lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y)$.
    Donc $f(\lambda x + \mu y) \in H$, i.e. $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$.

  Conclusion : $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  Par définition $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$ est l'image réciproque de E par f^{-1}.
  Or $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel (trivial) de F.
  Donc, par le point démontré précédemment, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) On raisonne par double implication.

$\underline{\Rightarrow}$ Supposons que f est injective et montrons par double inclusion que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

- ⋆ $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ car $f(0_E) = 0_F$.
- ⋆ $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$ car, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a :
  $$f(x) = 0_F \implies f(x) = f(0_E) \implies x = 0_E \quad \text{[par injectivité de } f\text{]}$$
  Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.

Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies f(x) - f(y) = 0_F \\ &\implies f(x-y) = 0_F \quad \text{[par linéarité de } f\text{]} \\ &\implies x - y \in \text{Ker}(f) \quad \text{[par définition de Ker}(f)\text{]} \\ &\implies x - y = 0_E \quad \text{[car Ker}(f) = \{0_E\}\text{]} \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$

Donc f est injective.

$\square$