Programme de khôlle

Semaine 24 (23 mars 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 15 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercices réalisés : TD15, exercices n°1,2,3(2.3.),4,5,6(1.2.3.),8(1.2.),12,13

- Montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en montrant :
  - que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de référence ;
  - qu'il est engendré par une famille finie de vecteurs (qu'il peut s'écrire sous la forme d'un Vect).
  - qu'il peut s'interpréter comme le noyau d'une application linéaire (qu'il peut s'écrire sous la forme d'un Ker).
- Montrer qu'un ensemble n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :
  - en revenant à la définition : F et G sont supplémentaires dans E (i.e. $E = F \oplus G$) si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
  - en utilisant la caractérisation pratique : $E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ E = F + G \end{cases}$
- Montrer qu'une application est linéaire, que c'est un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.
- Montrer qu'une application n'est pas linéaire.
- Connaître les opérations sur $\mathscr{L}(E,F)$ (en particulier la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$), sur $\mathscr{L}(E)$ (produit de composition).
- Etudier l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire (par étude de l'image, du noyau).
- Montrer qu'une application est un projecteur ou une symétrie vectorielle et savoir déterminer les sous-espaces vectoriels caractéristiques associés.

Chapitre 16 : Analyse asymptotique 1ère partie : négligeabilité et développements limités

Exercices réalisés : TD16, exercices n°1,2(a,b),3,4,6(a.b.),7,8(1.)

- Connaître les DL usuels en 0 des fonctions $\exp$, $\sin$, $\cos$, $x \mapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $x \mapsto \ln(1+x)$, $\arctan$, ainsi que $\tan$ à l'ordre 3.
- Connaître la formule de Taylor-Young pour prévoir l'existence d'un DL pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (n fois dérivable suffit), la réciproque est fausse.
- Déterminer un DL simple, à un ordre modeste en 0 ou en $a \in \mathbb{R}$. Prévoir la nullité de certains coefficients (par exemple dans le cas d'une fonction paire ou impaire).
- Appliquer les DL pour les calculs de limites, étudier comportement et les propriétés locales d'une fonction (prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement, position de la courbe par rapport à la tangente), recherche d'asymptote.

Note : Les relations de domination et d'équivalence n'ont pas encore été traitées en cours.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Sous-espaces vectoriels supplémentaires*

   On considère l'ensemble $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ le sous-ensemble des fonctions paires et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.
   <u>On admet que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.</u>
   Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
   Appliquer cette propriété à la fonction exponentielle.

2. *Transport de structure et caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire*

   Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

   (a) Démontrer l'un des deux points suivants (au choix de l'examinateur) :

- Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

  En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

- Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

  En déduire que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Puis démontrer que : f injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

3. *En cas d'existence, unicité du* $DL_n(0)$

Soient $0 \in \overline{I}$, f définie sur I ou $I \backslash \{0\}$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que, si f admet un $DL_n(0)$ alors celui-ci est unique.