Démonstrations exigibles

Semaine 24 (22 mars 2021)

---

1. *Sous-espaces vectoriels supplémentaires*

   On considère l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ le sous-ensemble des fonctions paires et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.
   On admet que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   Appliquer cette propriété à la fonction exponentielle.

   Preuve :

   - Montrons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$

     Raisonnons par analyse-synthèse et montrons que :

     $$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad \exists!(g,h) \in \mathscr{P} \times \mathscr{I}, \quad f = g + h.$$

     ⋆ *Analyse :* Supposons qu'il existe $(g,h) \in \mathscr{P} \times \mathscr{I}$ tel que $f = g + h$.
     Nécessairement, pour $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) \overset{(\star)}{=} g(x) + h(x) \\ f(-x) \overset{(\star\star)}{=} g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$
     En sommant $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve : $f(x) + f(-x) = 2g(x)$.

     En faisant la différence de $(\star)$ et $(\star\star)$, on trouve : $f(x) - f(-x) = 2h(x)$.

     Ainsi, nécessairement, le seul couple possible est défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

     ⋆ *Synthèse :* Réciproquement, si on considère le couple trouvé précédemment, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

     $$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \quad \text{donc } g \text{ est paire ;} \\ h(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x) \quad \text{donc } h \text{ est impaire ;} \\ g(x) + h(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x) \quad \text{donc } f = g + h. \end{aligned}$$

     Conclusion : tout vecteur de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de $\mathscr{P}$ et d'un vecteur de $\mathscr{I}$, donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   - La décomposition de la fonction $\exp$ est donnée par :

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} + \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \underbrace{\cosh}_{\in \mathscr{P}}(x) + \underbrace{\sinh}_{\in \mathscr{I}}(x).$$

   $\square$

2. *Transport de structure et caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

(a) Démontrer l'un des deux points suivants (au choix de l'examinateur) :

- Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
  En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  En déduire que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Puis démontrer que : f injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Preuve :

(a)
- Soit G un sous-espace vectoriel de E.
  Montrons que $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
  - $\star$ $f(G) \neq \emptyset$. En effet, $0_E \in G$ (car G sev de E) et $f(0_E) = 0_F$ (car f est linéaire), donc $0_F \in f(G)$.
  - $\star$ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\alpha, \beta \in f(G)$. Montrons que $\lambda\alpha + \mu\beta \in f(G)$.
    Il existe $x, y \in G$ tels que : $\alpha = f(x)$ et $\beta = f(y)$.

    $$\text{Ainsi : } \quad \begin{aligned} \lambda\alpha + \mu\beta &= \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= f(\lambda x + \mu y) \quad \text{[car } f \text{ est linéaire]} \end{aligned}$$

    Comme G est sous-espace de E, $\lambda x + \mu y \in G$ ainsi $\lambda\alpha + \mu\beta = f(\lambda x + \mu y) \in f(G)$.

  Conclusion : $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
  Par définition $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ est l'image de E par f.
  Or E est un sous-espace vectoriel (trivial) de E.
  Donc, par le point démontré précédemment, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Soit H un sous-espace vectoriel de F.
  Montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  - $\star$ $f^{-1}(H) \neq \emptyset$. En effet, $0_F \in H$ (car H sev de F) et $f(0_E) = 0_F$ (car f est linéaire), donc $0_E \in f^{-1}(H)$.
  - $\star$ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in f^{-1}(H)$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$.
    On a $f(x) \in H$ et $f(y) \in H$.
    Comme H est un sous-espace vectoriel de F : $\lambda f(x) + \mu f(y) \in H$.
    Comme f est linéaire : $\lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y)$.
    Donc $f(\lambda x + \mu y) \in H$, i.e. $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$.

  Conclusion : $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  Par définition $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$ est l'image réciproque de E par f^{-1}.
  Or $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel (trivial) de F.
  Donc, par le point démontré précédemment, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) On raisonne par double implication.

$\underline{\Rightarrow}$ Supposons que f est injective et montrons par double inclusion que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

- $\star$ $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ car $f(0_E) = 0_F$.
- $\star$ $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$ car, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0_F &\implies f(x) = f(0_E) \\ &\implies x = 0_E \quad \text{[par injectivité de } f\text{]} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.

Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies f(x) - f(y) = 0_F \\ &\implies f(x-y) = 0_F \quad \text{[par linéarité de } f\text{]} \\ &\implies x - y \in \mathrm{Ker}(f) \quad \text{[par définition de } \mathrm{Ker}(f)\text{]} \\ &\implies x - y = 0_E \quad \text{[car } \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}\text{]} \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$

Donc f est injective.

$\square$

3. *En cas d'existence, unicité du* $DL_n(0)$

Soient $0 \in \overline{I}$, f définie sur I ou $I\backslash\{0\}$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que, si f admet un $DL_n(0)$ alors celui-ci est unique.

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux listes de réels $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_n)$ distinctes telles que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

On a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

En notant $p = \min\{k \in [\![0; n]\!] \mid a_k \neq b_k\}$, la relation précédente s'écrit : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(a_k - b_k)x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ ou encore

$(a_p - b_p)x^p \underset{x\to 0}{=} -\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n}(a_k - b_k)x^k + o(x^n)$.

En divisant par x^p, on obtient : $\boxed{a_p - b_p \underset{x\to 0}{=} -\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n}(a_k - b_k)x^{k-p} + o(x^{n-p})}$ $(\star)$.

Or pour tout $k \in [\![p+1; n]\!]$ on a $k - p \geq 1$, ainsi $x^{k-p} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et, de plus, $o(x^{n-p}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que :

$$-\sum_{k=p+1}^{n}(a_k - b_k)x^{k-p} + o(x^{n-p}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Grâce à $(\star)$, cela rentre en contradiction avec le fait que $a_p - b_p \neq 0$.

$\square$