Programme de khôlle

Semaine 25 (29 mars 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 16 : Analyse asymptotique 1ère partie : négligeabilité et développements limités

Exercices réalisés : TD16, exercices n°1,2(a,b),3,4,6(a.b.),7,8(1.)

- Connaître les DL usuels en 0 des fonctions $\exp$, $\sin$, $\cos$, $x \mapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $x \mapsto \ln(1+x)$, $\arctan$, ainsi que $\tan$ à l'ordre 3.
- Connaître la formule de Taylor-Young pour prévoir l'existence d'un DL pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (n fois dérivable suffit), la réciproque est fausse.
- Déterminer un DL simple, à un ordre modeste en 0 ou en $a \in \mathbb{R}$. Prévoir la nullité de certains coefficients.
- Appliquer les DL pour les calculs de limites, étudier comportement et les propriétés locales d'une fonction (prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement, position de la courbe par rapport à la tangente), recherche d'asymptote.

Note : Les relations de domination et d'équivalence n'ont pas encore été traitées en cours.

Chapitre 17 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercices réalisés : TD17, exercices n°1(1.2.(a,b,c)),2,3,5,6,7,8

- Montrer qu'une famille est libre ou liée (pour les vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on peut utiliser la matrice des vecteurs mis en colonne).
- Trouver une base d'un espace vectoriel, compléter (ou restreindre) une famille en une base.
- Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel (pour connaître sa dimension, ou dont on connaît déjà la dimension), déterminer une base d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Connaître et savoir utiliser les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Construire un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.
- Montrer que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie (soit à l'aide d'une base adaptée, soit à l'aide de la caractérisation par les dimensions et l'intersection)
- Déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

Note : Le cours sur les applications linéaires en dimension finie vient juste d'être débuté. Aucun exercice sur ce thème n'a pour l'instant été réalisé.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *En cas d'existence, unicité du $DL_n(0)$*

   Soient $0 \in \overline{I}$, f définie sur I ou $I \backslash \{0\}$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que, si f admet un $DL_n(0)$ alors celui-ci est unique.

2. *Existence de supplémentaires en dimension finie*

   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F possède un supplémentaire G dans E, i.e. montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F \oplus G$.
   On admettra le théorème de la base incomplète.

3. *Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires à l'aide des dimensions*

   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

   Montrer les équivalences :

$$\underbrace{E = F \oplus G}_{(i)} \iff \underbrace{\begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}}_{(ii)} \iff \underbrace{\begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}}_{(iii)}$$

On admettra que $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$ *et la formule de Grassmann.*

4. *Caractérisation des applications linéaires injectives par l'image d'une base*

   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

   Montrer que f est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.